

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ  
(СамГУПС)



*На правах рукописи*

**Мустафаев Юрий Кямалович**

**ДИНАМИКА ХОДОВЫХ ЧАСТЕЙ ВАГОНА  
С УЧЁТОМ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СВОЙСТВ  
КОЛЁСНЫХ ПАР**

Специальность 05.22.07 – Подвижной состав железных дорог, тяга поездов и  
электрификация (технические науки)

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук

Научные руководители:

**д. т. н., профессор Кудюров Л. В.**

к. т. н., доцент **Свечников А. А.**

Самара

2021

## О Г Л А В Л Е Н И Е

ВВЕДЕНИЕ.....	5
1 СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ.....	16
1.1 Обзор исследований в области динамики подвижного состава.....	16
1.2 Конструкция трёхэлементной тележки грузового вагона и её неисправности .....	31
1.3 Постановка задач и выбор методики их решения .....	36
<i>1.3.1 Геометрия дополнительных динамических сил             реакций, обусловленных гироскопическим эффектом .....</i>	<i>37</i>
<i>1.3.2 Кинематика одиночной колёсной пары.....</i>	<i>39</i>
<i>1.3.3 Постановка задач исследования и выбор методики их             решения.....</i>	<i>43</i>
2 ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ КОЛЕСНОЙ ПАРЫ С УЧЕТОМ ЕЁ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СВОЙСТВ.....	45
2.1 Движение колёсной пары с учётом её гироскопических свойств и упругого проскальзывания в точках контакта.....	45
2.2 Колебания колёсной пары в постановке задачи как ротора в неравноупругих опорах .....	54
2.3 Определение резонансных частот колебаний колёсной пары.....	60

2.4	Динамические реакции буксовых узлов, обусловленные гироскопическим эффектом вращающейся колёсной пары .....	69
3	МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ТЕЛЕЖКИ ГРУЗОВОГО ВАГОНА .....	83
3.1	Общее описание модели и методика её синтеза .....	84
3.2	Выбор подвижных систем координат .....	87
3.3	Вывод полной кинетической энергии тележки .....	90
3.4	Вывод потенциальной энергии тележки.....	95
3.5	Определение работы сил трения и диссипации.....	107
3.5.1	<i>Модель гидравлического демпфера .....</i>	<i>107</i>
3.5.2	<i>Модель фрикционного гасителя колебаний.....</i>	<i>109</i>
4	ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ .....	113
4.1	Краткое описание модели и вычислительного процесса .....	113
4.2	Линеаризация модели и оценка сходимости решений.....	122
4.3	Оценка влияния гироскопического эффекта на движение звеньев тележки.....	125
4.4	Моделирование прохождения одиночной вертикальной неровности .....	128
4.5	Сравнение результатов моделирования с экспериментальными данными.....	138
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ. ....	140

Список литературы .....	144
Приложение А .....	161
Приложение Б .....	183

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность работы.** Обеспечение безопасности перевозок – одна из главнейших задач всех служб железной дороги. Несмотря на постоянное проведение мероприятий по повышению безопасности движения, полностью избежать случаев схода подвижного состава не удастся. Причинами схода, зачастую, являются отклонения параметров вагона и рельсового пути от эксплуатационных норм. Чтобы с достаточной достоверностью прогнозировать поведение транспортных динамических систем при наличии конструктивных и эксплуатационных отклонений различных параметров экипажа, а также возмущающих воздействий, необходима адекватная методика моделирования динамики подвижного состава. В качестве объекта моделирования выбран грузовой вагон на трёхэлементных тележках модели 18-100, 18-578, 18-194 и т.п. Данные тележки имеют сходную структурную формулу, по ним накоплен обширный экспериментальный материал, что существенно облегчает процесс отладки и проверки адекватности разработанной математической модели и инженерного метода оценки влияния дефектов на динамику тележки.

На протяжении многих лет эксплуатации тележки 18-100, а также её модернизированных аналогов, частота сходов, связанных с неисправностями тележки, а также при отсутствии очевидных неполадок, как со стороны пути, так и со стороны тележки, говорит о том, что динамические процессы, протекающие при движении тележки, до сих пор остаются недостаточно изученными. Следовательно, необходима разработка уточнённых математических моделей, позволяющих учесть максимальное количество факторов, обуславливающих поведение моделируемого объекта, в особенности при стечении неблагоприятных факторов, каждый из которых в отдельности не приводит к нарушению условий устойчивости и безопасности движения. Результатом построения математических моделей и их анализа являются разработки рекомендаций по срокам проведения

контроля, ремонта или замены отдельных узлов тележки. Следует отметить, что эти сроки могут сильно различаться в зависимости от преимущественных условий эксплуатации. Этот вопрос становится особенно актуальным в связи с планами ОАО «РЖД» по переходу от планово-предупредительной системы ремонта к ремонту по фактическому состоянию. В этом случае очень важно достоверное прогнозирование сроков контроля и ремонта отдельных узлов для конкретной тележки. Например, тележки, эксплуатируемые преимущественно под груженым вагоном будут испытывать бóльшие нагрузки и подвергаться большему износу, чем тележки той же конструкции, но используемые под порожним вагоном. С другой стороны, рессорный комплект и демпфер сухого трения, рассчитанные под определенную загрузку вагона, в порожнем вагоне будут эксплуатироваться в других условиях, что, в сочетании с рядом других конструкционных и эксплуатационных отклонений конструкции тележки, может стать причиной схода и аварии.

Большое влияние на износ элементов конструкции тележки оказывает также состояние железнодорожного полотна на участках преимущественной эксплуатации вагона. На участках, где качество полотна хуже, имеется больше неровностей в профиле и плане пути, износ элементов будет более интенсивным, и, соответственно, межремонтные пробеги должны быть сокращены. Именно совокупный учет таких факторов, как загрузка вагона, конструкционные параметры тележки, допустимые отклонения конструкции, состояние окружающей среды (температура, влажность, запыленность), а также модель возмущающего воздействия от заданного участка пути может дать результаты в виде интенсивности износа, нагрузок, развиваемых в деталях, а также областей устойчивости и безопасного движения. Поэтому при определении динамических реакций связей элементов конструкции тележки в зависимости от возмущающего воздействия со стороны рельсового пути, необходимо учитывать максимум факторов, способных оказать влияние на характер такого взаимодействия. Как показал анализ исследований по теме работы, недостаточное внимание уделяется влиянию гироскопических эффектов от вращающихся колёсных пар на динамику

ходовых частей вагона. Тем не менее, можно предположить, что с развитием скоростного и высокоскоростного движения необходимость в моделях, учитывающих гироскопические свойства колёсных пар, будет возрастать. Так, например, в работе [71] был опубликован первоначальный подход к проблеме построения модели, однако, впоследствии, в [53] была сделана приближённая оценка влияния гироскопического эффекта от вращающейся колесной пары на нагрузку колеса при наличии несимметричного возмущающего воздействия. Согласно с результатами, полученными в [53], было принято решение о необходимости учета гироскопических эффектов в данной работе. Определение условий безопасного и устойчивого движения вагонов, оптимальных характеристик элементов конструкции и прогнозирование межремонтных пробегов представляет задачу, важную как с практической, так и научной точки зрения. Исходя из сказанного выше, можно сделать вывод, что тема представленной работы актуальна, и соответствует направлениям научных изысканий кафедр «Вагоны» и «Наземные транспортно-технологические средства» СамГУПС.

**Степень разработанности темы.** Исследованиям в области динамики подвижного состава, взаимодействия ходовых частей и верхнего строения пути посвящено множество работ известных авторов, среди которых С. В. Вершинский, В. А. Лазарян, В. Ф. Ушкалов, М.Ф. Вериги, А. Я. Коган, В. Д. Хусидов, В. Н. Филиппов, Ю.П. Бороненко и многие другие. Теоретические и экспериментальные изыскания в области практического применения полученных знаний в целях оптимизации конструкции подвижного состава и железнодорожного полотна заняты различные научно-производственные и образовательные организации отрасли, в том числе ВНИИЖТ, ВНИКТИ, МИИТ, ПГУПС, УрГУПС, РГУПС, БГТУ, ФГУП ПО «Уралвагонзавод», ОАО «НВЦ «Вагоны» и ряд других отраслевых вузов и предприятий. Анализ исследований показал, что современными тенденциями является построение комплексных многопараметрических моделей динамики ходовых частей подвижного состава, позволяющих проводить многофакторный анализ внешних воздействий и

оценивать динамические качества конструкции в целом. В связи с выше сказанным встает вопрос учета множества различных факторов, воздействующих на ходовые части железнодорожного экипажа. Степень адекватности и достоверности построенных моделей зачастую зависит от уровня и глубины использования общих положений физики и теоретической механики, а также применяемого математического аппарата. Было выявлено, что в существующих теоретических исследованиях недостаточно внимания уделяется вопросам воздействия гироскопических эффектов, появление которых может быть обусловлено быстрым вращением колёсных пар. Таким образом, в качестве основной гипотезы настоящей работы является предположение, что гироскопические свойства, проявляющиеся при быстром вращении массивных тел, способны оказывать влияние на общую динамику ходовых частей железнодорожных экипажей.

**Целью диссертационной работы** является исследование и анализ динамических качеств ходовых частей вагона с учётом гироскопических свойств колёсных пар.

Для достижения поставленной цели были сформированы следующие задачи:

- анализ развития и современного состояния исследований динамики ходовых частей грузовых вагонов для выявления системных проблем в разработке моделей динамики;

- разработка математической модели движения колёсной пары по прямолинейному участку рельсового пути с учётом её гироскопических свойств и упругого проскальзывания (крипа) в зоне контакта колесо-рельс;

- разработка математической модели синтез дифференциальных уравнений малых движений колёсной пары, при рассмотрении её в качестве ротора, вращающегося в опорах, имеющих различную жесткость в горизонтальном и вертикальном направлениях, вывод аналитической зависимости для определения собственных частот колебаний колёсной пары в функции от скорости её поступательного движения, создание методики оценки резонансных частот



колебаний колёсной пары при наличии динамического дисбаланса, несоосности и эллиптичности колёс;

- создание методики оценки динамических реакций в буксовых узлах, обусловленных гироскопическим эффектом вращающихся колёсных пар и оценка вклада гироскопических сил в динамическую нагруженность буксовых узлов и боковых рам;

- разработка расчетной схемы и математической модели динамики тележки грузового вагона, алгоритма и программы расчета, позволяющих определить кинематические и динамические параметры ходовых частей тележки с учётом гироскопических свойств колёсных пар;

- проведение численного моделирования, анализ и сопоставление результатов расчётов с экспериментальными данными, оценка адекватности разработанной математической модели динамики ходовых частей, определение параметров, отличающих разработанную модель от существующих аналогов, а также оказывающих влияние на динамические качества тележки.

**Объектом исследования** является трёхэлементная тележка грузового вагона.

**Область исследования** динамика подвижного состава, динамические качества ходовых частей вагона при движении по рельсовому пути, взаимодействие пути и подвижного состава.

**Методология и методы исследования** строятся на использовании классических методов теоретической механики, методов математического анализа, теоретических методов исследования: синтеза математических моделей, методов математического и имитационного моделирования, а также эмпирических (опытных) методов, таких как анализ и сравнение результатов расчёта с экспериментальными данными для оценки уровня достоверности разрабатываемых моделей. Численное решение и визуализация результатов проводилась в программном пакете Mathematica. Экспериментальные исследования, направленные на подтверждение адекватности синтезированных математических моделей динамики колёсной пары использовался программный

комплекс «Универсальный механизм». Для определения массово-инерциальных характеристик элементов тележки использовались программные пакеты твердотельного моделирования SolidWorks и Компас 3D. При анализе результатов использовалась программа Excel из пакета MS Office.

**Научная новизна** результатов работы:

- 1) разработана математическая модель тележки грузового вагона, в отличие от существующих, учитывающая гироскопические свойства колёсных пар;
- 2) получена аналитическая зависимость и впервые проведена оценка частот собственных колебаний вращающихся колёсных пар при постановке задачи как вращающегося ротора в упругих опорах с анизотропной жёсткостью;
- 3) разработана методика позволяющая провести оценку влияния статического и динамического дисбаланса на амплитуду и характер вынужденных колебаний колёсной пары при учете её гироскопических свойств, впервые проведена оценка вклада гироскопических сил в общую динамическую нагруженность буксовых узлов;
- 4) получена аналитическая зависимость влияния гироскопических свойств одиночной колёсной пары на траекторию извилистого движения при различных скоростях движения.

**Теоретическая и практическая значимость** выполненной работы.

- получены уравнения, позволяющие определить траекторию и длину волны извилистого движения колёсной пары с учётом ее гироскопических свойств и упругого проскальзывания в пятне контакта «колесо-рельс»;

- получены математические зависимости собственных частот колебаний колёсной пары от скорости движения вагона и разработана методика оценки резонансных частот колёсной пары, позволяющая выявить критические скорости движения экипажа, при которых возникают наибольшие динамические воздействия, а также выработать способы вывода этих частот в зону неэксплуатационных скоростей;

- разработана модель и методика оценки динамических реакций буксовых узлов, обусловленных гироскопическим эффектом вращающихся колёсных пар,

которая, в отличие от существующих, позволяет оценить дополнительный вклад в динамическую нагруженность буксовых узлов, вызванный влиянием гироскопических эффектов от вращающейся колесной пары;

- разработана программа расчёта динамики тележки грузового вагона с учётом гироскопических свойств вращающихся колёсных пар, позволяющая проводить анализ зависимостей конструкционных параметров тележки на динамические и ходовые качества вагона, а также сократить сроки проектирования новых типов ходовых частей грузовых вагонов за счет сокращения необходимого объема натурных экспериментальных исследований.

### **Реализация результатов работы.**

С помощью разработанных инженерных методик и расчётных моделей были даны оценки причин сходов подвижного состава, на основании которых составлены акты научно-технической экспертизы по следующим происшествиям:

- сход вагона в грузовом поезде на участке Черниковка-Шакша Башкирского отд. КБШ ЖД в 2006 году.

- сход вагона в грузовом поезде на участке Давлеканово – Шингак-Куль Башкирского отд. КБШ ЖД в 2002 году; с целью анализа причин схода была разработана программа расчета, защищенная авт. свидетельством № 2011614641, зарегистрированная в Федеральной службе по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам в 2011 году [57];

Разработанная методика и программа расчетов, в рамках партнёрского соглашения, были переданы для использования в производственной деятельности ООО «Уральское конструкторское бюро вагоностроения (УКБВ)» (входит в группу компаний «Уралвагонзавод» (УВЗ)). Разработки были оценены и рекомендованы к использованию, что подтверждается актом об использовании, приведённом в Приложении Б

Использование теоретических результатов работы в учебном процессе на кафедре «Вагоны» СамГУПС при проведении практических и лабораторных работ по дисциплинам «Основы механики подвижного состава (Основы динамики подвижного состава)», «Математические модели объектов и процессов»

подтверждается актом о внедрении результатов диссертационного исследования в учебный процесс, приведённом в Приложении Б.

**Основные результаты и научные положения, выносимые на защиту:**

- 1) аналитические зависимости частоты и длины волны движения колёсной пары в рельсовой колее в функции от её поступательной скорости с учётом гироскопических свойств и упругого проскальзывания (крипа) в пятне контакта «колесо-рельс»
- 2) математическая модель движения колёсной пары как ротора в неравноупругих опорах;
- 3) методика оценки динамических реакций в буксовых узлах, обусловленных гироскопическим эффектом вращающихся колёсных пар;
- 4) математическая модель динамики тележки грузового вагона с учётом гироскопических свойств колёсных пар, позволяющая определять кинематические и динамические параметры всех элементов и узлов тележки на штатных и резонансных режимах эксплуатации;

**Степень достоверности и апробация результатов работы.**

Достоверность результатов работы подтверждена соответствием теоретических расчетов и известных экспериментальных данных. Основные положения и результаты работы докладывались и обсуждались на научно-практических конференциях:

- международной научно-технической конференции «Вычислительная механика деформируемого твердого тела», МИИТ, 2006;
- III Межвузовской конференции «Прикладные математические задачи в машиностроении и экономике». Самара: СамГУ, 2006;
- международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы динамики и прочности материалов и конструкций, модели и методы» Самара: СамГУПС 2007 г.;
- международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы трибологии», Самара: СамГТУ, 2011 г.;

- международной научно-технической конференции «Наука и образование транспорту», Самара: СамГУПС, 2016г.;
- III научно-технический семинар «Компьютерное моделирование в железнодорожном транспорте: динамика, прочность, износ», Брянск: БГТУ, 2016;
- международной научно-технической конференции «Наука и образование транспорту», Самара: СамГУПС, 2017г.
- научном марафоне, посвященном 30-летию со дня основания факультета «Подвижной состав и путевые машины», «Подвижной состав: современные тенденции и перспективы развития транспортной отрасли», Самара: СамГУПС, 2019 г.

Результаты диссертационного исследования в окончательном виде доложены и обсуждены на расширенном заседании кафедры «Наземные транспортно-технологические средства» СамГУПС 2 апреля 2021 года и получили одобрение.

Публикации. Самостоятельно и в соавторстве по материалам диссертации опубликовано 14 печатных работ [53-55, 58, 66-75], в том числе 4 работы в научных журналах, входящих в «Перечень рецензируемых научных изданий, рекомендованных ВАК для публикаций научных результатов диссертаций» [66, 68, 69, 71].

#### **Объем и структура работы.**

Диссертационная работа состоит из введения, 4 глав, заключения, библиографического списка использованных источников и приложений. Объем работы: 160 страниц основного машинописного текста, 2 приложения, 59 рисунков, 5 таблиц. Библиографический список использованной литературы содержит 151 источник.

В первой главе выполнен краткий обзор объекта исследования, неисправностей тележки мод. 18-100 и их влияние на динамику подвижного состава, приведён обзор литературы, посвященной исследованиям динамики подвижного состава, разрабатывается общая программа исследований.

Во второй главе проводится разработка математической модели движения колёсной пары по прямолинейному участку рельсового пути с учётом упругого проскальзывания в контакте колесо-рельс согласно линейной теории крива и гироскопических свойств колёсной пары, математической модели малых колебаний колёсной пары, при рассмотрении её в качестве ротора, вращающегося в опорах, имеющих различную жесткость в горизонтальном и вертикальном направлениях, получены частотные уравнения в виде функциональных зависимостей собственной частоты от угловой скорости, разработана методика определения динамических реакций в буксовых узлах, в том числе и в резонансных режимах, с учётом влияния гироскопических свойств. Приведён анализ дополнительной нагруженности буксовых узлов в резонансных режимах в сравнении с упрощенной моделью (без учета гироскопических свойств).

В третьей главе выполнен синтез математической модели динамики трёхэлементной тележки грузового вагона с учётом полученных ранее уравнений движения одиночной колёсной пары с использованием уравнений Лагранжа второго рода и нелинейных диссипативных функций фрикционного гасителя колебаний.

В четвертой главе осуществлён выбор системы численного анализа и сам анализ при ряде задаваемых параметров. Приводятся результаты расчетов, направленных на моделирование различных ситуаций, возникающих при движении тележки. Проводятся расчеты и количественная оценка влияния гироскопического эффекта на разгрузку колесных пар при высоких скоростях движения. Обсуждаются полученные результаты, и формулируются общие положения по разрабатываемым моделям.

Работа выполнена на кафедре «Наземные транспортно-технологические средства» Самарского государственного университета путей сообщения.

Автор выражает благодарность коллективам кафедр «Наземные транспортно-технологические средства», «Вагоны», «Локомотивы» и «Электрический транспорт» факультета «Подвижной состав и путевые машины» СамГУПС, кафедре «Теоретической механики» федерального государственного

автономного образовательного учреждения «Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева», за помощь в проведении экспериментальных исследований, консультации и ценные советы, сыгравшие очень важную роль в завершении представленной работы.

Автор посвящает работу памяти своего учителя и научного руководителя, профессора, доктора технических наук, профессора кафедры «Наземные транспортно-технологические средства» Льва Владимировича Кудюрова.

## **1 СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ**

В представленной главе выполняется обзор научных исследований по теме исследований, полученных к настоящему времени различными авторами, обсуждается состояние проработанности вопроса, проводится обзор объекта исследования, выявляются проблемы, требующие решения. Описывается круг задач, рассматриваемых в диссертационной работе, и вырабатывается стратегия их решения.

### **1.1 Обзор исследований в области динамики подвижного состава**

Железные дороги Российской Федерации являются одной из важнейших и крупнейших транспортно-промышленных отраслей нашей страны. Они обеспечивают грузо- и пассажироперевозки, причём для некоторых регионов страны они являются по сути единственным крупным транспортным агентом. Этой особой роли железные дороги удостоились благодаря специфической географии и климатическим особенностям России, состояния альтернативной транспортной инфраструктуры. Как отмечено в «Белой книге» [151], актуальными задачами развития холдинга ОАО «РЖД» в перспективе до 2030 года являются задачи, направленные на снижение затрат и издержек компании на содержание и восстановление инфраструктуры за счет снижения динамического воздействия вагонов на путь, на повышение эксплуатационных скоростей движения, развитие скоростных и высокоскоростных пассажирских перевозок. Как отдельную научную задачу следует отметить имитационное моделирование и экспериментальные исследования по взаимодействию элементов конструкций подвижного состава и железнодорожного пути, в том числе при реализации повышенных скоростей движения.

Отмеченное в планах развития компании ОАО «РЖД» повышение скоростей движения грузового подвижного состава, интенсификация его использования за счёт увеличения грузоподъемности вагонов может быть



достигнута, в частности, путём увеличения осевой нагрузки, снижения накладных расходов за счёт увеличения гарантированных межремонтных пробегов, снижения числа аварий и сходов, увеличения безопасности движения. Причём, стоит отметить, что соблюдение условий безопасности движения является приоритетным направлением для любого вида транспорта. Для соблюдения требований безопасной эксплуатации железнодорожных экипажей в частности и безопасности движения в целом на всей сети железных дорог при росте остальных показателей эксплуатационной работы необходима модернизация основных фондов, в том числе, использование тягового и нетягового подвижного состава, спроектированного в соответствии с требованиями программы модернизации железнодорожной отрасли РФ.

Для обеспечения возможности проектирования подвижного состава в области оптимизации различных параметров, обеспечивающих требуемый уровень безопасности, ходовых качеств и комфорта, используются имитационные модели динамики железнодорожных экипажей.

Переход от планово-предупредительного ремонта, когда ремонт осуществляется через определенные, регламентированные нормами, промежутки времени, вне зависимости от технического состояния, к ремонту по фактическому состоянию несёт экономическую выгоду за счёт исключения лишних затрат на ремонт, а также затрат от простоя подвижного состава, но требует наличие мощной диагностической базы. В ряде случаев, диагностика элементов подвижного состава также влечет за собой ощутимые экономические затраты, обусловленные необходимостью извлечения транспортного средства из потока грузоперевозок и доставкой к станции технической диагностики. В идеальном варианте, при внедрении системы ремонта по фактическому состоянию, необходимо постоянно контролировать состояние подконтрольных узлов, что требует установки на них непрерывно действующих средств диагностики и сбора информации о текущем состоянии, чтобы максимально использовать ресурс изделия, но не допустить выход за пределы надежности, когда возникает риск внезапного отказа. В ряде случаев присутствие таких систем экономически

оправдано, например, на тяговом подвижном составе (ТПС), что обусловлено их относительно высокой стоимостью, высокими затратами на техническое обслуживание и издержками от необоснованного простоя, высокой себестоимостью ремонта и текущими затратами при внезапном отказе, относительно малым количеством единиц ТПС по отношению к парку грузовых вагонов. Наличие же непрерывно действующих средств диагностики на нетяговом подвижном составе, таком как грузовые вагоны, до настоящего времени считается целесообразным по причине значительного количества единиц подвижного состава, отсутствия единого собственника, сложности объединения этих средств в информационную систему при достаточно частой сцепке-расцепке вагонов. В этом случае целесообразнее воспользоваться средствами моделирования процессов в элементах конструкции вагона, в частности, тележки грузового вагона, и получить оценку текущего технического состояния, а также спрогнозировать наступления критического состояния на основании полученных результатов моделирования. Данные с промежуточных заходов на диагностику технического состояния также должны вноситься в текущую модель и корректировать не только состояние модели, но и учитывать изменение темпа фактического износа, что может сильно сказаться на прогнозируемых сроках ремонта.

Таким образом, ключевой задачей является создание адекватной динамической модели, наиболее полно учитывающей не только структуру самого объекта исследования, но и включающей в себя зависимость от условий эксплуатации, таких как скорости движения на отдельных участках, данные о состоянии рельсового пути, полученные с использованием путевых станций дефектоскопии и оценки состояния железнодорожного пути и периодических данных от средств диагностики подвижного состава. При их совмещении становится возможным получить представление о динамических воздействиях на объекты инфраструктуры при движении по конкретному участку пути. При введении в модель состояния окружающей среды, появляется возможность

получить зависимости интенсивности износа пар трения от запыленности, влажности, температуры.

Задача разработки моделей динамики подвижного состава стоит едва ли не с момента начала использования железнодорожного транспорта. Тем не менее, актуальность этой задачи не уменьшается и в настоящее время.

Рассматривать задачу исследования динамических качеств ходовых частей вагонов невозможно без изучения существующих к настоящему времени научных исследований по этому вопросу. Теоретические изыскания и экспериментальные исследования динамических качеств тележек и вагонов проводились многими образовательными и научно-производственными организациями, в том числе МИИТом, ВНИИЖТом, ПГУПСом, УрГУПСом, РГУПСом, ВНИКТИ, ДвГУПСом, БГТУ, ФГУП ПО «Уралвагонзавод», ОАО «НВЦ «Вагоны», а также многими другими вузами и предприятиями железнодорожной отрасли.

На основе анализа литературы можно прийти к выводу, что принято делить исследования динамики железнодорожных экипажей на три основных направления – вертикальную и горизонтальную поперечную и продольную динамику.

Продольная динамика рельсовых экипажей представлена в работах [7, 8, 10, 22, 23, 28, 29, 59, 60, 64, 65, 76, 83, 103-107, 117-120, 123, 125], особый вклад в развитие которой внесли С. В. Вершинский, В. Д. Хусидов, Ю. М. Черкашин, Е. П. Блохин, В. А. Лазарян, П. Т. Гребенюк, В. Ф. Ушкалов и многие другие известные учёные, и относится, преимущественно, к исследованию поведения железнодорожного состава в целом, что важно при изучении режимов ведения поездов при тяге, выбеге и торможении, определении критериев «выжимания» вагонов, продольных колебаниях, в том числе и наливных сцепов. В частности, особый интерес в настоящее время представляет продольная динамика длинносоставных и соединённых поездов, управляемых по системе многих единиц тяги (СМЕ, СМЕТ) [64, 65]. Разрабатываемые модели динамики применяются в алгоритмах устройств автоматического ведения поездов (САВП).

Анализ публикаций по темам, касающимся вертикальной динамики железнодорожных экипажей позволил сделать вывод, что основными направлениями исследований в этой области являются вопросы колебаний экипажей в зависимости от параметров рельсового пути, вопросы взаимодействия пути и подвижного состава, задачи определения частот и форм собственных колебаний вагонов, разработка методики определения упруго-демпфирующих свойств вертикального рессорного подвешивания, позволяющих улучшить динамические и ходовые качества экипажей. К исследователям, работы которых занимают центральное место в области изучения вертикальной динамики подвижного состава следует отнести С. В. Вершинского, И. И. Челнокова, М.Ф. Вериго, В. А. Лазаряна, Е. П. Блохина, Н.А. Панькина, А. Я. Когана, М. М. Соколова, Н. Н. Кудрявцева, Л. О. Грачеву, Ю. М. Черкашина, А. П. Буйносова, Г. П. Бурчака, А.Н. Савоськина, В. С. Плоткина и многих других авторов [8, 18-22, 25-27, 30, 37, 44-48, 59, 61, 76, 77, 81, 82, 101, 106-109, 114, 115, 133, 142].

Так, например, в работах [17, 18, 22, 37, 77, 91, 95, 99, 106, 107, 127] представлены модели экипажа, принимаемого в виде тел точечной массы, связанной упругими связями первой и второй (при наличии) ступени подвешивания, а необрессоренные части вагона движутся в абсолютно жестком контакте по рельсовой нити, имеющей параметрические вертикальные неровности. Эти модели позволяют выбрать оптимальные параметры рессорного подвешивания путём решения системы линейных или линеаризованных дифференциальных уравнений вертикальных колебаний экипажа. Модернизация подобных моделей шла по пути увеличения количества тел, что позволило оценить влияние свойств рессорного комплекта не только на колебания подпрыгивания, но и на галопирование и боковую качку. Тем не менее, большинство из представленных моделей основаны на использовании линейных систем дифференциальных уравнений, позволяющих получить аналитическое решение, либо оценить устойчивость полученных систем, например по методу малого параметра, путём исследования матрицы коэффициентов однородной системы дифференциальных уравнений согласно критерию Раусса-Гурвица.

Важным вопросом в задачах вертикальной динамики подвижного состава является выбор оптимального значения диссипативных сил с целью эффективного гашения вертикальных колебаний. Этот вопрос был исследован в работах многих авторов [11, 13, 25, 51, 97, 106, 108, 109, 119, 120], среди которых особое место занимают исследования И.И. Челнокова. Было установлено, что при определенном сочетании параметров происходит заклинивание клинового фрикционного гасителя, вследствие чего резко ухудшаются показатели вертикальной динамики обрессоренных масс [105]. Указанное явление в профильной литературе известно под названием «jamming» - заедание (англ.)

В ряде работ [78, 79, 92, 102, 104, 106, 108-110, 113-115, 117-120, 131] выявляются недостатки линейного рессорного подвешивания, исследуются и предлагаются конструкции с нелинейной, в том числе и билинейной характеристикой основного рессорного комплекта, выбираются и обосновываются параметры подклиновых пружин, отличающихся от пружин основного рессорного комплекта.

Наибольший интерес представляют работы В. Д. Хусидова, В. Н. Филиппова [108, 109, 117-120], в которых приводятся практические подходы по моделированию фрикционных демпферов, основные положения которых применены в модели фрикционного клинового гасителя, использованной в данной работе.

Задачи поперечной динамики рельсовых экипажей тесно связаны с проблемой взаимодействия пути и подвижного состава, задачами устойчивости рельсового пути и рассмотрены в работах [5, 14-16, 19, 20, 35, 42, 61, 87, 121, 126, 129-132]. Указанная взаимосвязь обусловлена тем, что величины поперечных сил взаимодействия в зоне колесо-рельс определяют устойчивость рельса против опрокидывания (раскантовки), а также, наряду с вертикальными силами, определяют устойчивость подвижного состава против схода и опрокидывания. При реализации повышенных скоростей движения важной задачей является обеспечение возможности движения вагона без контакта гребней колес с рельсами с целью исключения возникновения дополнительных сил трения на

гребне колеса, вертикальные составляющие которых способствуют вкатыванию колеса на рельс. С. В. Вершинским был рассмотрен случай контакта гребня колеса и головки рельсов и дано определение коэффициента безопасности, выражающего отношение горизонтальной и вертикальной составляющей реакции в месте контакта колеса и рельса [22].

Следует отметить исследования в области устойчивости подвижного состава [5, 20, 22, 23, 37, 42, 43, 48, 59, 60, 76, 78, 79, 82, 95-97, 102, 103, 112-117, 124, 129-133, 142 ], принадлежащие известным авторам: В. А. Лазаряну, Т. А. Тибилову, А. Я. Когану, М. Ф. Вериге, Г. Шеффелю, В. Н. Данилову, В. Г. Иноземцеву, А. А. Хохлову, В. М. Кондрашову и др. В работах [125, 126] , принадлежащих Ю. М. Черкашину и М.Л. Коротенко, приводится методика выбора математической модели устойчивости движения экипажа в рельсовой колее

Следует отметить, что на вертикальную динамику подвижного состава, в том числе, на амплитуды и частоты вертикальных колебаний) оказывает существенное влияние характеристики железнодорожного пути, в особенности, конструкция и параметры жесткости его верхнего строения. Этот вопрос получил рассмотрение в работах Г. М. Шахунянца [128], А.Я. Когана [44-48] и других ученых [26, 27, 30, 61, 81]. На основании проведенных исследований следует, что параметры рессорного подвешивания железнодорожного экипажа должны назначаться с учетом параметров жесткости и демпфирования рельсо-шпальной решетки. Например, М. Ф. Вериге в работах [18, 19] показал на связь между скоростью движения вагона и амплитудой сил взаимодействия в зоне колесо-рельс.

Задача совместных колебаний рельсового пути и вагона, возникающих при движении колеса с дефектами на поверхности катания по рельсовому пути с различными неровностями была решена А.Я. Коганом в [46, 47]. Задаче взаимодействия железнодорожных колес, имеющих дефекты на поверхности катания, с рельсовой нитью посвящен ряд исследований, среди которых стоит отметить работы Л.В. Кудюрова, В. П. Червинского, Д. С. Гарипова и др. [54, 57,

124], в которых рассмотрено воздействие на рельс ударной нагрузки от колес, имеющих ползун, а также обоснован факт «закатывания» ползуна при превышении скорости движения относительно некоторого критического значения.

Во всех рассмотренных выше случаях при разработке моделей динамики рельсовых экипажей важной составляющей является задача контактного взаимодействия в системе колесо-рельс и триботехнические задачи [9, 38, 41, 48, 50, 77, 85, 135-138, 140, 141]. В этом направлении следует отметить исследования И.И. Калкера [41], А.П. Буйносова [17], В.И. Колесникова [48, 50], Д.Ю. Погорелова [85] и многих других исследователей. При этом помимо контактных сил нормального давления определяются касательные силы в пятне контакта, приводящие к упругому проскальзыванию – крипу (от англ. creep – ползти). Явление крипа рассмотрено во многих работах, посвященных контактному взаимодействию. Наиболее часто применяются формулы определения величины продольного и поперечного крипа по Ф. Картеру [135].

Множество работ, в том числе и авторов, занимающихся исследованиями в области теоретической механики, посвящено динамике одиночной колёсной пары при её движении по рельсовому пути [32-34, 39, 87, 89, 94, 102, 143, 144]. С кинематической точки зрения движение колесной пары по прямому участку пути при наличии начального смещения или поворота представляет синусоидальную траекторию, не зависящую от скорости поступательного движения колёсной пары. Кинематические соотношения, описывающие это движение, носят название кинематических соотношений Клингеля. Например, в работе [31] рассмотрена задача движения колесной пары с коническим бандажом в классической постановке.

В реальности отмечено, что с ростом скорости происходит увеличение длины волны извилистого движения. Для этих случаев были получены эмпирические зависимости по результатам опытных поездок. Немецкий инженер Е. Шперлинг предложил использовать поправочные коэффициенты к формулам

Клингеля [22, 32], учитывающие скорость экипажа и вид закрепления колесной пары (упругая или жесткая связь с рамой тележки)

Такое отклонение от кинематических соотношений объясняется действием инерционных и гироскопических сил, а также наличием упругого проскальзывания в зоне контакта колесо-рельс [22]. Исследователями было предложено большое количество различных моделей, описывающих движение колесной пары по рельсовому пути с учетом различных факторов. В качестве примера можно привести работу [94], в которой получены уравнения движения колесной пары при наличии упругого проскальзывания (некоторые обозначения изменены относительно приведённых в статье):

$$\begin{cases} m\ddot{Y} + \frac{2k}{V}\dot{Y} - 2k\psi = 0 \\ J_z\ddot{\psi} + \frac{2kS^2}{V}\dot{\psi} + \frac{2knS}{r}Y = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

где  $m$  – масса КП,  $k$  – коэффициент проскальзывания (крипа),  $n$  – уклон (конусность) поверхности катания колеса,  $2S$  – расстояние между кругами катания колёс.

Сходные уравнения получены в [123] (различие лишь в обозначениях некоторых параметров, разница в знаках слагаемых объясняется рассмотрением случая ведомых и ведущих колёс):

$$\begin{cases} m_{kn}\ddot{y} + 2k\left(\frac{1}{V}\dot{y} + \phi_z\right) = 0 \\ J_{kn}^z\ddot{\phi}_z + 2kS\left(\frac{S}{V}\dot{\phi}_z - \frac{i}{r}y\right) = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Следует отметить, что в приведённых уравнениях, как и во многих подобных моделях других авторов, отсутствуют гироскопические слагаемые.

В исследованиях последних годов отмечаются тенденции к использованию нелинейных моделей, рассматривающих негерцевский контакт деталей [82, 139-141, 147, 148], нелинейные характеристики упругих элементов и демпферов колебаний, а также на основе комплексного подхода к динамике экипажа без



разделения на вертикальную, продольную и поперечную динамику [32, 33, 43, 76, 79, 82, 83, 91, 92, 97, 110, 114, 117, 118]. Это обусловлено применением компьютерных программных комплексов, использующих пространственные модели экипажей. Кроме того, нелинейность в уравнения движения вносит пространственная постановка задачи движения ходовых частей рельсовых экипажей, отмечаемая в большинстве работ последнего времени [32, 33]. Такие модели сводятся к системам нелинейных дифференциальных уравнений, число которых обусловлено числом степеней свободы рассматриваемых моделей. Решение уравнений, описывающих динамику нелинейных систем, в большинстве случаев, необходимо выполнять различными численными методами с использованием ЭВМ. При этом применяются как универсальные математические пакеты программ, так и специализированные программные комплексы, моделирующие непосредственно динамику механических систем путём автоматизированного синтеза уравнений движения за счёт формального описания механической системы с использованием встроенных в программную среду элементов построения модели. К таким программам относятся Nastran, Adams, SolidWorks, к отечественным разработкам следует отнести программные пакеты «Эйлер» («Euler»), «Универсальный механизм» (UM), разработанный под руководством д.ф.-м.н., проф. Погорелова Д.Ю. в БГТУ, программный комплекс «Дионис», разработанный в МИИТ под руководством проф. Петрова Г. И., проф. Филиппова и др.

Современные модели, в большинстве случаев, представляют собой пространственные стержневые структуры, соединённые специальными шарнирами. На основе изучения профильной литературы, было выявлено два подхода к составлению математической модели динамики тележки и экипажа. Первый заключается в использовании уравнений классической механики для описания уравнений движения и их решение системами компьютерной алгебры (Maple, Mathematica, MathCAD и т.п.), либо при помощи собственных программных пакетов, разработанных на базе оригинальных алгоритмов численного интегрирования. К примеру, коллектив авторов из ПГУПС Ю.П.

Бороненко, А.М. Орлова, Е.А. Рудакова и др. применяет для решения указанных задач программный пакет Medyna [12, 13, 78-80, 92]. Наиболее часто при этом используется принцип Даламбера, т.к. применяются подвижные (неинерциальные) системы координат. Достоинство указанного способа моделирования динамики рельсовых экипажей состоит в удобстве восприятия и анализа полученных уравнений движения с целью выявления ключевых параметрических зависимостей. Однако с этим достоинством связан и недостаток – получаемые уравнения тяжелы с математической точки зрения и требуют разработки специальных алгоритмов численного интегрирования. К примеру, на кафедре «Вагоны и вагонное хозяйство» РУТ (МИИТ) усилиями Г. И. Петрова, В. Д. Хусидова и др. был разработан программный комплекс «Дионис», представляющий собой набор модулей для численного интегрирования составленных заранее математических моделей, при разработке которых значительное внимание уделяется контактному взаимодействию колеса и рельса.

Плюсом такого подхода является то, что уравнения составляются на основе известных методов и принципов теоретической механики по однообразной методике, уменьшая тем самым возможность ошибки при составлении уравнений. Ограничением указанного подхода к исследованию динамики железнодорожных экипажей является отсутствие возможности автоматизированного синтеза уравнений. Для каждого типа экипажей новой структурной формулы требуется разработка новой математической модели, что замедляет процесс выбора различных конструктивных схем при разработке новой техники.

Второй подход к составлению математической модели динамики тележки или экипажа в целом состоит в применении математического аппарата линейной алгебры для описания математических моделей.

Как отметил акад. А. Н. Крылов [52], при классической «Лагранжевой» записи уравнений движения «... параметры – углы Эйлера – имеют простой смысл, уравнения для них сложны и не наглядны...» В случае применения векторного счисления для тела, имеющего ось симметрии, дифференциальные уравнения движения можно записать в более наглядной форме. Таким образом,

векторная форма записи дает большую физическую «прозрачность» компонентов дифференциальных уравнений движения, а классическая Лагранжева методика дает простоту и единообразие при составлении уравнений движения в ущерб их «физической» наглядности. Предпочтение той или иной форме зависит от личного желания и привычек исследователя и не влияет на конечный результат моделирования.

Суть данной методики построения моделей подвижного состава заключается в том, что взаимное положение ключевых точек задается радиус-вектором, относительное движение – матрицей поворотов, инерционные характеристики включаемых в систему тел – тензором инерции, силовое воздействие – матрицей сил и моментов и т.д. Как результат, синтез уравнений представляет собой операции над матрицами и может быть автоматизирован. Этот способ положен в основу моделей, разработанных авторами: И. А. Добычиным, А. Э. Павлюковым, А. В. Смольяниновым, Т. А. Юдаковой (УрГУПС) [32-34, 132].

Сходный принцип рассмотрен в работах [84-86] и заложен в основу математического аппарата синтеза уравнений движения, реализованный в программном комплексе «Универсальный механизм» (УМ/UM), разработанном на кафедре вычислительной математики БГТУ коллективом авторов под руководством проф. Д. Ю. Погорелова. Этот программный пакет нашёл широкое применение в моделировании динамики железнодорожных экипажей, для которых был разработан модуль моделирования динамики рельсовых экипажей UM Loco.

Следует отметить, что программный комплекс «Универсальный механизм» получил достаточно широкое применение благодаря высокой достоверности результатов моделирования и используется как самостоятельный инструмент исследования нелинейной динамики рельсовых экипажей в работах А. Э. Павлюкова, диссертации Р.В. Ковалева и др. [32, 43]

Достоинство рассмотренного выше подхода к составлению уравнений движения – математическая простота и прозрачность алгоритмов составления

уравнений, и, как следствие, высокая алгоритмизируемость вычислительного процесса. Минусом является то, что полученные уравнения сложны для непосредственного восприятия, анализ параметрических зависимостей возможен только после проведения серии численных экспериментов в пространстве заранее заданных параметров с требуемым шагом. Для создания достаточно плотной матрицы результатов требуется значительное машинное время, что может свести на нет преимущество в скорости разработки математических моделей. Для облегчения задач оптимизации моделей в УМ включён модуль оптимизации и многовариантных расчетов (UM Experiments).

Анализ публикаций по теме исследования позволяет сделать вывод о том, что множество общих и частных вопросов, касающихся динамики вагонов, до сих пор остается нерешенными. Для их решения требуется самый разносторонний подход со стороны исследователей. Именно кропотливое, постепенное уточнение моделей различных процессов продвигает науку о динамике транспортных систем к более точному пониманию процессов, происходящих в изучаемых системах. На научно-практических конференциях неоднократно рассматривался вопрос о необходимости создания математических моделей с учетом нелинейной динамики рельсовых экипажей, что в особенности актуально в плане наметившейся тенденции к росту скоростей движения экипажей и повышению статической осевой нагрузки.

Одним из таких вопросов является учет влияния гироскопического момента, возникающего при повороте оси быстро вращающейся колесной пары. В исследованиях, касающихся железнодорожной тематики вопросу влияния гироскопического эффекта от вращающихся колесных пар на динамику тележки не уделяется достаточного внимания. Анализ рассмотренных выше моделей рельсовых экипажей показал, что при их разработке гироскопический эффект от вращающихся колёсных пар не учитывается. В ряде моделей это связано с отказом от циклической координаты собственного вращения колёсной пары, и, как следствие, неправильному учету кинетического момента и направления его вектора, играющих ключевую роль в проявлении гироскопических свойств. В

других случаях влияние гироскопических членов в уравнениях движения, по мнению исследователей, считается незначительным и в дальнейшем не учитывается в динамике экипажа.

С учетом сказанного, на основании проведенного анализа исследований в области динамики подвижного состава в соответствии с основной целью работы была поставлена задача разработки математической модели динамики тележки, учитывающей гироскопические свойства и позволяющей оценивать характеристики её динамических и ходовых качеств при различных скоростях движения.

Анализ исследований также показал, что общим подходом к разработке современных моделей динамики подвижного состава является использование пространственных многоэлементных расчётных схем, составляющие тела которых наделены массово-инерционными характеристиками и имеют между собой, а также в зоне контакта с рельсовым путем, упруго-демпфирующие связи. Указанные связи вводятся в систему тел даже в том случае, если явно отсутствует соответствующая ступень рессорного подвешивания. В этом случае в качестве параметров упругости принимается совокупная контактная и изгибная жесткость [82]. Указанные параметры жесткости оказывают существенное влияние на ходовые качества.

Движение тел задается относительно подвижной системы координат, связанной с некоторой характерной точкой единицы подвижного состава, обычно с центром масс системы. Таким образом, указанная система координат совершает переносное движение, двигаясь вместе с подвижным составом относительно рельсового пути. Малые движения ходовых частей – их колебания относительно подвижной системы координат будут являться, соответственно, относительными. В результате сложного переносного движения, отличного от прямолинейного и равномерного, к действующим активным силам и реакциям связей добавляются переносные и кориолисовы силы инерции. Система уравнений движения формируется по количеству степеней свободы системы тел на основе законов классической механики. Наиболее часто для этого используется теоремы об

изменении количества движения и момента количества движения механической системы [22].

Аналогичная система уравнений движения может быть получена с использованием уравнений Лагранжа 2-го рода и их модификаций для случая неголономных систем. Практически во всех случаях из списка обобщенных координат и, соответственно, из числа степеней свободы исключается координата галопирования (собственное вращение) колесной пары. Это объясняется тем, что указанное движение не является независимым, т.е. дополнительной степенью свободы. В ряде случаев авторы избавляются от циклической координаты, неудобной для численного решения системы уравнений в связи с её монотонным ростом, что приводит к снижению доли значимости остальных координат, описывающих малые движения системы. В любом случае, устранение этого движения с точки зрения законов механики является некорректным и вносит некоторые погрешности в получаемые решения. Можно предположить, что для малых скоростей движения такое допущение не оказывает существенного влияния на получаемую картину динамики, что косвенно подтверждает инженерная практика, однако к настоящему моменту конкретных оценок, как в пользу такого допущения, так и против него, в профильных публикациях не приводилось. Тем не менее, учитывая, что вращение колесных пар вносит гироскопические члены в уравнения малых движений системы, а также принимая во внимание тенденцию к развитию высокоскоростного движения, становится очевидной актуальность проблемы и поставленной цели работы. Важна и оценка погрешности, связанной с указанным выше упрощением моделей динамики ходовых частей железнодорожных экипажей.

## **1.2 Конструкция трёхэлементной тележки грузового вагона и её неисправности**

В качестве объекта исследования выбрана трёхэлементная тележка грузового вагона. К данному классу объектов, помимо тележки 18-100 относится

целое семейство так называемых трёхэлементных грузовых тележек, например 18-578, 18-194, 18-1711, тележка ВНИКТИ, которые имеют сходную структурную схему, содержащую три основных типа конструктивных элементов, составляющих раму (что и объясняет возникновение термина «трёхэлементная»). К этим элементам относятся две боковые рамы, надрессорная балка и две колёсные пары. Конструкция этих тележек подробно описана в [3, 11, 13, 17, 22, 25, 40, 50, 51, 63, 127].

Рассмотрим конструкцию объекта исследования на примере тележки грузового вагона модели 18-100 (именовавшейся ранее ЦНИИ-ХЗ), которой оборудовались грузовые вагоны постройки позднее 1957 года. За годы эксплуатации тележка дважды модернизировалась [3, 11, 13, 40] – переход от буксовых подшипников скольжения с польстерной системой смазки на роликовые подшипники качения, увеличившие надёжность буксового узла, особенно в условиях низких температур, а также установка износостойких фрикционных накладок, увеличивающих эффективность ремонтных мероприятий.

Конструкция трехэлементной тележки представляет собой несвязанную пространственную раму и может быть представлена на примере тележки мод. 18-100 (рисунок 1.1). В её состав входят две боковые рамы 2, опирающиеся посредством букс 4 на колёсные пары 1. Надрессорная балка 3 опирается на боковые рамы через основные рессорные комплекты, состоящие из концентричных пар цилиндрических пружин встречной навивки 6. В состав основного рессорного комплекта входят фрикционные клиновые гасители колебаний, состоящие из четырех клиньев 5, и сменных фрикционных накладок, приклепываемых на вертикальную поверхность проёма боковой рамы. Нижнюю опорную, наклонную и вертикальную поверхности клина выполняют гладкими. На нижней опорной поверхности клина имеется выступ, предназначенный для его фиксирования пружиной, а выступы сбоку – для ограничения смещений надрессорной балки. Угол наклонных плоскостей принят равным  $45^\circ$ .

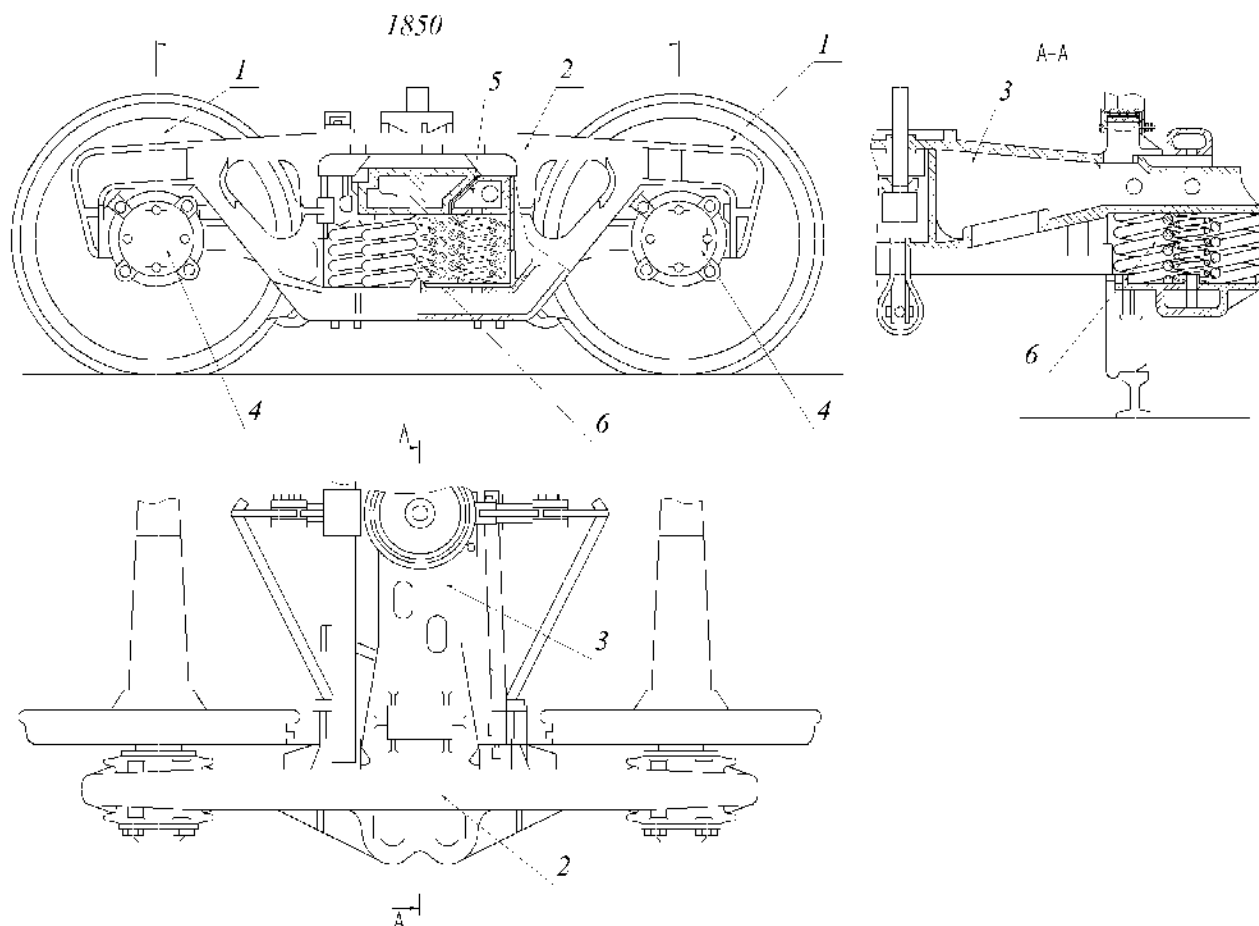


Рисунок 1.1 - Устройство тележки 18-100

Надрессорная балка выполнена в виде одной цельной отливки вместе с подпятником, имеет пазы для размещения фрикционных клиньев с углом наклона плоскости  $45^\circ$ . При постановке надрессорной балки на место, клинья входят в соответствующие пазы, упираясь своими наклонными поверхностями в наклонные плоскости последней, в следствие чего прижимаясь к стальным фрикционным планкам. При деформации пружин основного рессорного комплекта, клинья, перемещаясь относительно накладок боковых рам и наклонных плоскостей балки, создают силы трения, необходимые для гашения колебаний.

В процессе эксплуатации выявлен ряд недостатков тележки 18-100, как то: подрезание гребней колёсных пар, связанный с низкой поперечной жёсткостью тележки [21, 78-80, 90, 92, 132], недостаточная надёжность конструкции, приводящая к частым изломам боковых рам [62, 68, 82, 84, 93, 149, 150].



Отмечается, также, снижение критериев безопасности движения в некоторых режимах эксплуатации [20, 35, 73, 74, 102, 105, 108, 124], увеличение сил взаимодействия в системе «колесо-рельс» [18, 19, 25-27, 30, 35, 44-48, 50]. Отсутствие противоюзной системы нередко приводит к блокированию вращения колес с возможностью образования и развития ползуна [58].

Как показывает статистика, основными причинами отказа и поломки элементов конструкции тележек вагонов являются отклонения фактических размеров элементов конструкции от конструкционных. Этим обуславливаются повышенные зазоры в различных сопряжениях и сочленениях деталей, увеличение допустимых взаимных перемещений деталей и повышение динамических нагрузок (как стационарных, так и экстремальных динамических), что, в конечном счете, может привести к аварии.

Можно выделить два основных типа отклонений геометрии объекта от заданной: отклонения, вызванные несовершенством оборудования, используемого при изготовлении деталей – конструкционные отклонения, и отклонения, вызванные износом и повреждением деталей – эксплуатационные отклонения. К основным конструкционным отклонениям при изготовлении тележек грузового вагона относятся:

- неодинаковая длина боковых рам тележки и, как следствие, непараллельность осей колесных пар, вызывающая перекося тележки при движении, что повышает вероятность вкатывания колеса на рельс;

- разные зазоры между скользунами рамы вагона и тележки или их отсутствие, как следствие, интенсивный износ наиболее нагруженных скользунов;

- дисбаланс колесных пар, несоосность и эллиптичность колес, как следствие, – биение, повышенная периодическая нагрузка на все элементы конструкции (рисунок 1.2, 1.4);

- не выявленные при дефектоскопии микротрещины могут катастрофически быстро развиваться, особенно при повышенных динамических нагрузках, вызванных другими дефектами.



Рисунок 1.2 - Неисправности, вызванные повышенной периодической нагрузкой (фото из открытых источников)

К основным эксплуатационным дефектам тележки грузового вагона следует отнести:

- износ поверхности катания колес, значительно влияющий на частоту извилистого движения тележки и на устойчивость колёсной пары (КП) против схода с рельса;
- дефекты на поверхности катания колеса КП (в особенности ползуны), оказывающие значительные динамические нагрузки, как на рельс, так и на материал самого колеса, что может привести к излому рельса или раскалыванию обода колеса в сочетании с микротрещинами и расслоением структуры материала колеса (см. рисунок 1.3);



Рисунок 1.3 - «Сколы» на гребне и поверхности катания колеса (фото из открытых источников)

- разность диаметров колёс, принадлежащих одной КП, возникающая при неодинаковой обточке бандажей при формировании профиля катания колеса, и, как следствие, – поперечное смещение траектории извилистого движения тележки, что приводит к дополнительным поперечным нагрузкам, опасности выкатывания колеса на рельс при увеличении угла набегания или к раскантовке и опрокидыванию рельса в случае недостаточного его закрепления от поперечных нагрузок и опрокидывающих моментов;
- износ фрикционных клиньев и накладок боковых рам тележки, что приводит к снижению эффективности гашения колебаний, и, как следствие, повышенным динамическим нагрузкам в вертикальном направлении, что может привести к усталостным повреждениям элементов конструкции – изломам боковых рам и наддресорных балок (рисунок 1.4);
- износ скользунов приводит к повышению амплитуды боковой качки вагона при воздействии сил отбоя (поперечных движению), что также приводит к появлению дополнительной динамической нагрузки на боковые рамы;

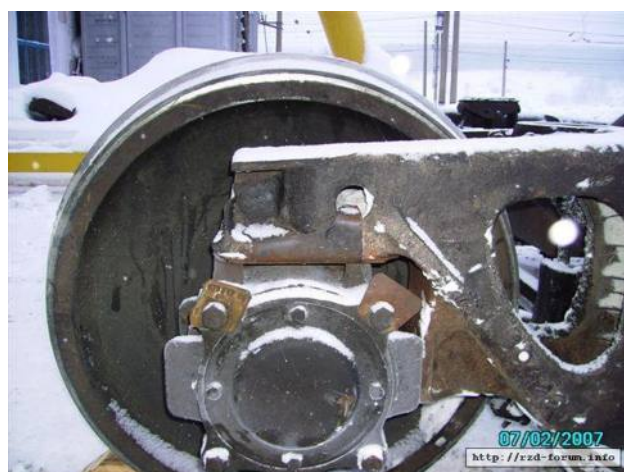


Рисунок 1.4 - Изломы боковых рам тележки (фото из открытых источников)

- невыявленные при диагностике буксовых узлов дефекты подшипников могут привести у их разрушению в процессе движения, перегреву буксы и излому шейки оси колёсной пары (рисунок 1.5).



Рисунок 1.5 - Перегрев буксового узла, вызвавший излом шейки оси колесной пары  
(фото из открытых источников)

Приведенный обзор основных дефектов тележки позволяет сделать вывод не только о важности отслеживания технического состояния узлов, но и о том, что при неблагоприятном стечении обстоятельств экстремальные значения динамических нагрузок могут значительно превысить расчетные нагрузки, что, в свою очередь, может привести к поломке детали значительно ранее истечения срока назначенного ресурса. Это свидетельствует о важности многопараметрического моделирования динамики ходовых частей вагонов.

### 1.3 Постановка задач и выбор методики их решения

Несмотря на большое количество исследований в области динамики подвижного состава, остаётся ряд вопросов, недостаточно изученных в настоящее время. Как было показано, одним из таких вопросов является учет влияния гироскопического момента, возникающего при повороте оси быстро вращающейся колесной пары на движение вагона. В то время как турбины судовых машин, самолетов и даже опоры гребных колес пароходов рассчитываются с учетом возможности поворота фундамента ротора [2, 52], в



исследованиях, касающихся железнодорожной тематики вопросу влияния гироскопического эффекта от вращающихся колесных пар на динамику тележки не уделяется достаточного внимания. Тем не менее, логично предположить, что с ростом скоростей движения, что особенно актуально в плане принятых программ по развитию высокоскоростного железнодорожного транспорта в нашей стране, такое влияние будет возрастать. В результате влияния быстро вращающейся колесной пары или прохождения несимметричных неровностей будут возникнуть гироскопические моменты, приводящие к дополнительной разгрузке колеса, увеличению угла набегания, и, следовательно, повышению вероятности вкатывания колеса на рельс. Чтобы оценить возможный вклад в динамику взаимодействия контакта колесо-рельс и динамику движения обрессоренных масс необходимо провести ряд дополнительных исследований по этому вопросу.

### ***1.3.1 Геометрия дополнительных динамических сил реакций, обусловленных гироскопическим эффектом***

Колесная пара (рисунок 1.6), как быстро вращающееся вокруг своей оси симметрии твердое тело, является гироскопом и обладает всеми его основными свойствами. Какие-либо возмущения, например, имеющаяся всегда разность радиусов колес, обусловленная криволинейным профилем поверхности катания, приводят к тому, что колесная пара вынуждена совершать вращение (поворот  $\psi$ ) в горизонтальной плоскости. При этом, на ось вращения колесной пары в опорах действует пара сил. С другой стороны, согласно свойствам гироскопа, и колесная пара действует на опоры такой же по величине, но противоположной по направлению парой сил с моментом  $\vec{M}_{1r}$ , который называется гироскопическим моментом.

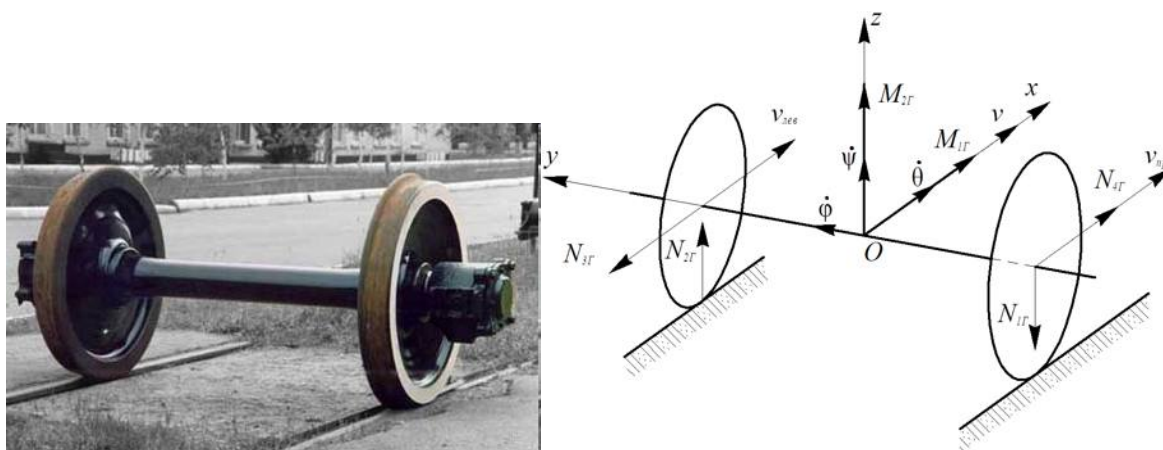


Рисунок 1.6 – Гироскопические добавки к силам реакций связей  
в контакте колесо-рельс

Вектор  $\vec{M}_{1Г}$  направлен в сторону поступательного движения колесной пары. Поэтому пара сил, создаваемая гироскопическим моментом колесной пары  $\vec{N}_{1Г}, \vec{N}_{2Г}$ , давит на правый по ходу движения рельс с силой  $\vec{N}_{1Г}$  и разгружает левый рельс с силой  $\vec{N}_{2Г}$ , равной и противоположно направленной силе  $\vec{N}_{1Г}$ . Таким образом, сила  $\vec{N}_{2Г}$  способствует вкатыванию колеса на рельс и при соответствующей скорости экипажа может создать аварийную ситуацию. Кроме того, при наличии перемещения по оси  $y$  колесная пара поворачивается вокруг оси  $x$  на угол  $\theta$ , создавая гироскопический момент  $\vec{M}_{2Г}$ , направленный по оси  $z$ , который воздействует на опоры парой сил  $\vec{N}_{3Г}, \vec{N}_{4Г}$  (см. рисунок 1.6), причем, сила  $\vec{N}_{3Г}$  действует на левую опору и направлена в сторону, противоположную направлению поступательного движения колесной пары, а сила  $\vec{N}_{4Г}$  действует на правую опору и направлена в противоположную сторону, то есть по ходу движения. Колесная пара совершает извилистое движение в горизонтальной плоскости. Возникает задача оценки частоты этого виляния и его длины волны, поскольку при больших скоростях эти параметры могут сыграть заметную роль в динамике ходовых частей экипажа.

Фактическим подтверждением влияния гироскопических и инерционных свойств ходовых частей является увеличение длины волны извилистого движения, как одиночной колёсной пары, так и тележки. В динамике вагонов указанное влияние учитывается введением различных поправок в дифференциальное уравнение извилистого движения колёсной пары с коническим профилем бандажей. К ним относятся эмпирические формулы, полученные по результатам испытательных заездов. Однако к настоящему моменту отсутствует единая, применяемая в проектировочных расчётах теоретическая модель динамики колёсной пары с учётом упругого проскальзывания в пятне контакта, которая позволила бы получить результаты, сходные с экспериментальными данными во всём диапазоне эксплуатационных скоростей.

Подобные вопросы, касающиеся влияния гироскопических свойств колёсных пар на динамику её движения, были рассмотрены в работах [53, 67-69, 124]. В работе [124] большое внимание уделено динамике движения одиночной колёсной пары. Особый интерес представляют работы в области теоретической механики, теории гироскопов, математическим методам решения задач нелинейной динамики и моделирования колебательных систем с наличием Кулонова трения [52, 98].

### ***1.3.2 Кинематика одиночной колёсной пары***

Представляет интерес расчет фактической траектории движения центра масс колесной пары, упруго связанной с кузовом, при наличии упругого проскальзывания в контакте колесо-рельс. Определим эту кривую в горизонтальной плоскости  $xOy$  с осями координат  $x$  - по направлению поступательного движения колесной пары,  $y$  - по оси собственного вращения влево по ходу движения,  $z$  - дополняет систему координат до правой (см. рисунок 1.6). Пусть радиус фактической окружности катания левого по ходу движения колеса равен  $r_{лев}$ , радиус правого –  $r_{пр}$ . Допустим, что профиль поверхности

качения колеса имеет коническую форму с углом наклона  $\beta$  образующей к вертикали (см. рисунок 1.7). Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} r_{лев} &= r + ny(x), \\ r_{пр} &= r - ny(x), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $n$  – тангенс угла  $\beta$  наклона образующей конической поверхности катания колеса к вертикали,  $y(x)$  – боковое смещение центра масс колесной пары,  $r$  – радиус окружности катания колеса.

Угловая скорость колесной пары равна [рад/с]:

$$\omega = \dot{\phi} = \frac{\dot{x}}{r}. \quad (1.4)$$

Скорость центра левого и правого колёс равна соответственно:

$$v_{лев} = \dot{\phi} r_{лев} = \dot{x} \frac{r_{лев}}{r}, \quad (1.5)$$

$$v_{пр} = \dot{\phi} r_{пр} = \dot{x} \frac{r_{пр}}{r}. \quad (1.6)$$

Угловая скорость поворота колесной пары вокруг вертикальной оси (виляния):

$$\dot{\psi}(x) = \frac{v_{пр} - v_{лев}}{2s}, \quad (1.7)$$

где  $2s$  – расстояние между кругами качения колёсной пары.

Подставив в (1.7) выражения (1.5) и (1.6) с учетом (1.3), получим:

$$\dot{\psi}(x) = -\dot{x} \frac{n}{rs} y(x). \quad (1.8)$$

Поперечное движение колесной пары является следствием ее поворота относительно вертикальной оси:

$$\dot{y}(x) = \dot{x} \operatorname{tg} \psi(x) \approx \dot{x} \psi(x). \quad (1.9)$$

Перепишем выражения (1.8) и (1.9) в виде:

$$\frac{d\psi(x)}{dt} = -\frac{dx}{dt} \frac{n}{rs} y(x), \quad (1.10)$$



$$\frac{dy(x)}{dt} = \frac{dx}{dt} \psi(x) . \quad (1.11)$$

Умножив на  $dt$  и разделив на  $dx$ , получим:

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = -\frac{n}{rs} y(x) , \quad (1.12)$$

$$\frac{dy(x)}{dx} = \psi(x) . \quad (1.13)$$

Продифференцировав (1.13) по  $x$ , получим:

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = \frac{d\psi(x)}{dx} . \quad (1.14)$$

Подставив (1.14) в (1.12), получим дифференциальное уравнение траектории движения центра масс колесной пары в виде:

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + \frac{n}{rs} y(x) = 0 , \quad (1.15)$$

которое представляет однородное дифференциальное уравнение второго порядка и имеет решение вида:

$$y = a \sin(kx + \alpha) , \quad (1.16)$$

где  $k = \sqrt{\frac{n}{rs}}$  ,

а  $a$  и  $\alpha$  определяются из начальных условий:

$$a = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{y'_0}{k}\right)^2} , \quad \alpha = \arctg\left(\frac{y_0 k}{y'_0}\right) \quad (1.17)$$

$y_0$  задается, а производная  $y'_0$  равна:

$$y'_0 = \psi_0 < \frac{b}{\sqrt{h(2r_r - h)}} , \quad (1.18)$$

где  $b$  – ширина рабочей части профиля поверхности катания,  $h$  – высота гребня колеса,  $r_r$  – радиус гребня (рисунок 1.7).

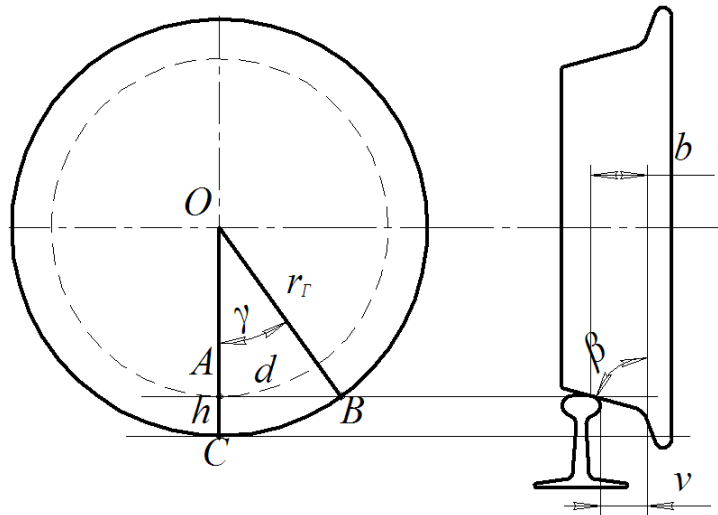


Рисунок 1.7 – К определению начальных условий

Полученное уравнение (1.16) известно как кинематическое уравнение Клингеля [22, 32, 77, 123 и др.] и описывает траекторию движения колёсной пары с коническим бандажом по прямолинейному пути при отсутствии проскальзывания. Известно, что с ростом скоростей движения наблюдается отклонение частоты и длины волны извилистого движения от полученных выше. В действительности, с увеличением скорости рост частоты замедляется, и длина волны извилистого движения увеличивается. Экспериментально такое отклонение можно учитывать эмпирической поправкой к уравнениям движения, например, поправкой Шперлинга:

$$\omega'_u = \omega_k \cdot \eta,$$

где  $\omega'_u$  – фактическая частота извилистого движения КП,  $\omega_k$  – частота извилистого движения, определяемая согласно кинематическим соотношениям

Клингеля,  $\eta = \frac{1}{1 + k \sqrt{\frac{n}{sr} (v - v_k)}}$  – поправочный коэффициент;

$k = 0,025$  для колёсных пар, упруго соединённых с рамой тележки;  $k = 0,016$  для колёсных пар, жёстко связанных с рамой тележки вдоль оси, поперечной направлению движения [60].

Представляет практический интерес получение аналитических критериальных зависимостей частоты и длины волны траектории, дающих удовлетворительную сходимость с эксплуатационными данными.

### ***1.3.3 Постановка задач исследования и выбор методики их решения***

На основе проведённого анализа работ и публикаций для достижения цели диссертационного исследования были поставлены задачи, решаемые в представленной работе.

Первой задачей является разработка модели движения колёсной пары по прямолинейному участку рельсового пути с учётом упругого проскальзывания (крипа) в зоне контакта колесо-рельс и выявления критериальных аналитических зависимостей между массо-инерционными характеристиками колёсной пары, начальными условиями и параметрами движения. Задача ограничена случаем одноточечного контакта и коническим профилем катания. Результатом решения задачи является методика определения частоты и длины волны траектории движения колёсной пары по рельсовому пути с учётом её гироскопических свойств и упругого проскальзывания в пятне контакта «колесо-рельс».

Второй задачей является разработка математической модели малых колебаний колёсной пары, рассматриваемой как ротор в неравноупругих опорах, которая включает следующие подзадачи:

- вывод дифференциальных уравнений движения колёсной пары как ротора в неравноупругих опорах;
- вывод аналитической зависимости собственных частот колебаний колёсной пары от скорости её поступательного движения (получение частотного уравнения);
- разработка метода оценки резонансных частот колебаний колёсной пары при наличии динамического дисбаланса, несоосности и эллиптичности колёс;
- разработка метода оценки динамических реакций в буксовых узлах, обусловленных гироскопическим эффектом вращающихся колёсных пар.

Третьей задачей является разработка математической модели динамики тележки грузового вагона, алгоритма и программы расчета, позволяющих определить кинематические и динамические параметры всех элементов и узлов тележки на штатных и резонансных режимах эксплуатации с учётом гироскопических свойств колёсных пар, а также с учётом конструкционных и эксплуатационных параметров тележки и её элементов от технических норм, особенно при повышенных скоростях движения.

Для разработки математической модели, описывающей движение тележки грузового вагона по прямым участкам пути с учетом гироскопических свойств колёсных пар, предусматривается выполнение следующих этапов:

- разработка расчетной схемы тележки грузового вагона с 30-ю степенями свободы, в которой положение каждого элемента задано в связанной подвижной системе координат;
- синтез системы дифференциальных уравнений Лагранжа II рода;
- понижение порядка системы дифференциальных уравнений и численный анализ полученной системы;
- разработка алгоритма и тестирование программного кода программы численного анализа динамики ходовых частей грузового вагона с учетом гироскопических свойств колёсных пар;
- линеаризация математической модели динамики ходовых частей грузового вагона и сравнительный анализ линеаризованного решения и обоснование применения линеаризованной модели в дальнейших расчётах;
- сопоставление результатов численного моделирования с экспериментальными данными и оценка адекватности разрабатываемой математической модели;
- проведение компьютерного моделирования с целью определения влияния гироскопических свойств колёсных пар в зависимости от скорости движения экипажа.

Решению поставленных задач посвящены следующие главы представленной работы.

## **2 ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ КОЛЕСНОЙ ПАРЫ С УЧЕТОМ ЕЁ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СВОЙСТВ**

В представленной главе получены дифференциальные уравнения движения колесной пары с коническим бандажем при наличии упругого проскальзывания с учётом гироскопических свойств. Анализ численного решения позволил сделать вывод об увеличении длины волны извилистого движения КП с ростом её поступательной скорости, что в действительности имеет место при движении высокоскоростных ж.д. экипажей и подтверждается хорошей сходимостью результатов моделирования с экспериментальными данными.

Получены дифференциальные уравнения малых колебаний колёсной пары, рассматриваемой как ротор с четырьмя степенями свободы, закреплённый в неравноупругих опорах. Анализ уравнений привёл к аналитической зависимости собственных частот крутильных колебаний колёсной пары в функции от угловой скорости её вращения. Выявлены резонансные частоты, обуславливающие возрастание динамических реакций в буксовых узлах от гироскопических свойств колёсной пары.

Результаты, полученные по второй главе, подтверждают необходимость учёта гироскопических свойств колёсных пар при построении математических моделей динамики железнодорожных экипажей. Показано, что особую роль указанное влияние приобретает при исследовании высокоскоростного движения.

### **2.1 Движение колёсной пары с учётом её гироскопических свойств и упругого проскальзывания в точках контакта**

Извилистое движение колёсной пары обусловлено нецилиндричностью поверхностей катания колёс и, как следствие, сферическим характером её движения.

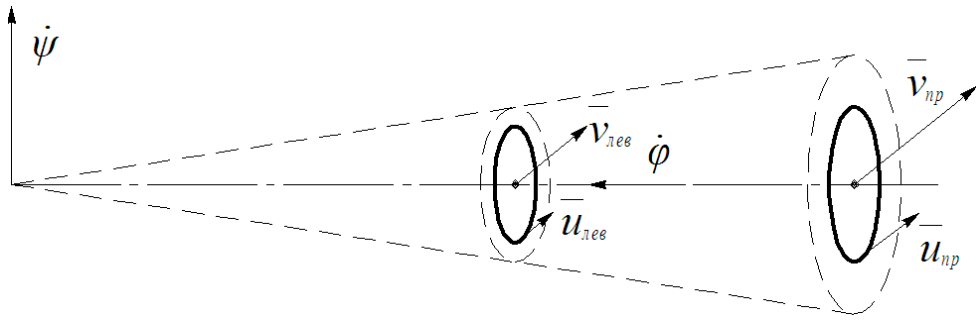


Рисунок 2.1 – Сферическое движение колёсной пары

Из-за разности радиусов центр правого колеса на рисунке 2.1 опережает центр левого колеса, придавая колёсной паре угловую скорость  $\dot{\psi}$  в принятой ранее системе координат.

У колёс локомотива в режиме тяги касательная сила в точке контакта направлена против направления движения. Следовательно, вектор относительной скорости проскальзывания также направлен противоположно вектору скорости движения центра колеса (рисунок 2.2 а). С точки зрения кинематики это эквивалентно уменьшению фактического радиуса качения при отсутствии проскальзывания (крипа).

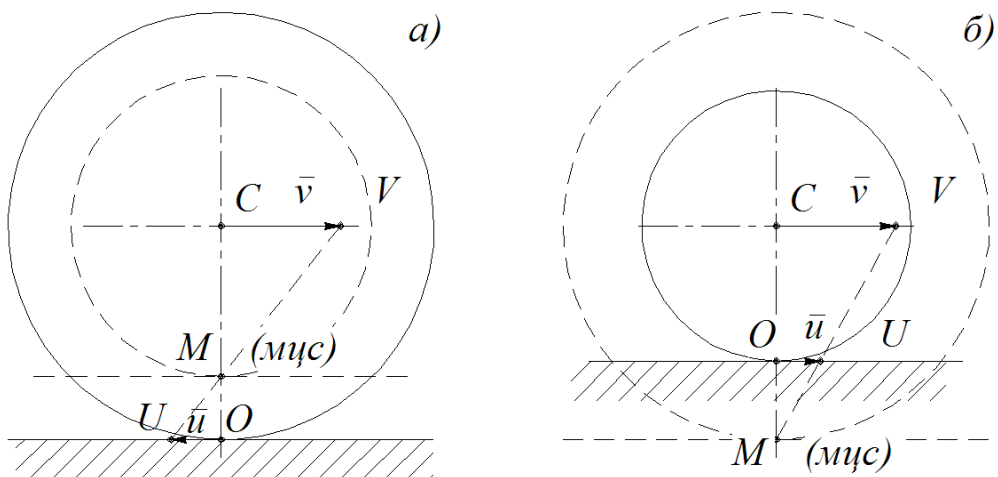


Рисунок 2.2 – Геометрия качения колеса при наличии проскальзывания

В нетяговом подвижном составе, а также у локомотивов в режиме выбега и торможения относительно оси колёсной пары действует момент сопротивления

качению или тормозной момент, который создаёт касательную силу в точке контакта колесо-рельс, направленную в сторону движения экипажа (см. рисунок 2.2 б). Из соображений, рассмотренных выше, положение мгновенного центра скоростей смещается наружу от центра колеса, что эквивалентно увеличению фактического радиуса качения колеса при отсутствии проскальзывания.

Таким образом, если известна скорость относительного проскальзывания в точке контакта колеса и рельса, можно скорректировать кинематический радиус качения колеса, что внесёт изменения в полученные выше кинематические уравнения извилистого движения колёсной пары с коническим бандажом.

Из условия подобия треугольников  $MCV$  и  $MOU$  (по свойству параллельности их сторон) (см. рис. 2.2б) покажем, что фактический радиус качения равен:

$$r' = \frac{r}{1 - \frac{u}{v}}, \quad (2.1)$$

где  $u$  – скорость относительного проскальзывания,  $v$  – скорость движения центра колеса.

$$r' = CM = CO + OM \quad (2.2)$$

$$\frac{v}{CM} = \frac{u}{OM},$$

следовательно:

$$OM = CM \frac{u}{v}$$

$$CM = CO + CM \frac{u}{v}$$

$$CO = CM \left(1 - \frac{u}{v}\right)$$

$$CM = r' = \frac{CO}{1 - \frac{u}{v}} = \frac{r}{1 - \frac{u}{v}}$$

Следует отметить, что скорость  $u$  необходимо брать с учётом знака относительно скорости  $v$ .

Известно, что упругое проскальзывание (крип) учитывается коэффициентом:  $\varepsilon_x = \frac{u_x}{v}$  а  $P_x = -k\varepsilon_x$ , где  $k = a\sqrt{Nr}$ ,  $P_x$  – касательная сила, приложенная к колесу от рельса,  $N$  – сила нормального давления колеса на рельс,  $a$  – некоторый коэффициент, эмпирическое значение которого принимается равным  $6 \div 8$  кН для железнодорожных колёс [22, 77, 123].

Тогда фактический радиус качения можно записать для каждого колеса в отдельности как:

$$r' = \frac{r}{1 - \varepsilon_x} = \frac{r}{1 + \frac{P_x}{k}} = \frac{r}{1 + \frac{P_x}{a\sqrt{Nr}}} \quad (2.3)$$

Учитывая конусность поверхности катания колёс  $n$ , получим приведённые радиусы с учетом упругого проскальзывания для каждого колеса:

$$r'_{np} = \frac{r_0 - n_{np}y}{1 + \frac{P_{np x}}{a\sqrt{N_{np}r_0}}}, \quad r'_{лев} = \frac{r_0 + n_{лев}y}{1 + \frac{P_{лев x}}{a\sqrt{N_{лев}r_0}}} \quad (2.4)$$

Средний приведённый радиус окружности качения:

$$r_{cp} = \frac{r'_{np} + r'_{лев}}{2} \quad (2.5)$$

Угловая скорость вилания определяется выражением:

$$\dot{\psi} = \frac{v_{np} - v_{лев}}{2s}, \quad (2.6)$$

где  $v_{np} = \dot{\phi}r'_{np}$ ,  $v_{лев} = \dot{\phi}r'_{лев}$ .

Уравнение (2.6) запишем в виде:

$$\dot{\psi} = \frac{\dot{x}}{2sr_{cp}} (r'_{np} - r'_{лев}), \quad (2.7)$$

После преобразований получим:

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{r'_{np} - r'_{лев}}{2sr_{cp}} \quad (2.8)$$

Учитывая, что:



$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} \psi, \quad (2.9)$$

откуда:

$$\psi = \frac{dy}{dx} \quad (2.10)$$

Дифференцируя по  $x$  и подставляя в (2.8) получим:

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{r'_{np} - r'_{лев}}{2sr_{cp}} = \frac{r'_{np} - r'_{лев}}{s(r'_{np} + r'_{лев})}. \quad (2.11)$$

Рассмотрим случай поперечного проскальзывания (крипа), который также влияет на форму траектории извилистого движения колёсной пары. Скорость поперечного смещения зависит от угла виляния и поперечного крипа:

$$\dot{y} = \dot{x}\psi + u_y \quad (2.12)$$

Согласно определению коэффициента поперечного крипа, запишем:

$$\varepsilon_y = \frac{u_y}{\dot{x}}, \text{ откуда } u_y = \varepsilon_y \dot{x} = \varepsilon_y \frac{dx}{dt}, \quad (2.13)$$

где, как показано выше,

$$\varepsilon_y = \frac{F_y}{k}, \quad k = a\sqrt{Nr} \quad (2.14)$$

с учетом (2.13) можно (2.12) записать, выразив скорость поперечного смещения центра масс колёсной пары как:

$$\dot{y} = \dot{y}_0 + \varepsilon_y \dot{x} = \dot{x}(\psi + \varepsilon_y), \quad (2.15)$$

где  $\dot{y}_0 = \dot{x}tg\psi \approx \dot{x}\psi$  – скорость поперечного движения центра масс без учёта поперечного крипа, обусловленная её поворотом относительно вертикальной оси и поступательным движением.

С другой стороны, подставляя (2.14) в (2.15), получим значение скорости поперечного смещения колёсной пары в зависимости от поперечной силы:

$$\dot{y} = \dot{x} \left( \psi + \frac{F_y}{k} \right) \quad (2.16)$$

Для определения значения поперечной силы, вызывающей скольжение, выполним преобразования, разделив (2.16) слева и справа на  $\dot{x}$ , раскрыв скобки и сократив  $dt$

$$\frac{F_y}{k} = \psi - \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \psi - \frac{dy}{dx} \quad (2.17)$$

$$F_y = k \left( \psi - \frac{dy}{dx} \right) \quad (2.18)$$

Для определения траектории извилистого движения, запишем (2.15) в виде:

$$\frac{dy}{dx} = \psi + \varepsilon_y, \quad (2.19)$$

откуда:

$$\psi = \frac{dy}{dx} - \varepsilon_y. \quad (2.20)$$

Дифференцируя по  $dx$ , получим:

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} \varepsilon_y - \frac{dy}{dx} \frac{d\varepsilon_y}{dx}, \quad (2.21)$$

учитывая, что  $\frac{d\varepsilon_y}{dx} = 0$  и приравнявая к (2.11), получим окончательно:

$$\frac{d^2y}{dx^2} \varepsilon_y = \frac{r'_{\text{пр}} - r'_{\text{лев}}}{2sr_{\text{сп}}}. \quad (2.22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \psi + \frac{F_y}{a\sqrt{N_{\text{сред}} r_{\text{сп}}}} \\ \frac{d\psi}{dx} = \frac{\frac{r_{\text{сп}} - n_{\text{пр}} y}{1 - \varepsilon_{x\text{пр}}} - \frac{r_{\text{сп}} + n_{\text{лев}} y}{1 - \varepsilon_{x\text{лев}}}}{2sr_{\text{сп}}} \end{array} \right. \quad (2.23)$$

$$\dot{\theta} = 2n\dot{y} = \dot{y}(n_{\text{пр}} + n_{\text{лев}}) \quad (2.24)$$

Рассмотрим колёсную пару, учитывая приложенные силы (рисунок 2.3).

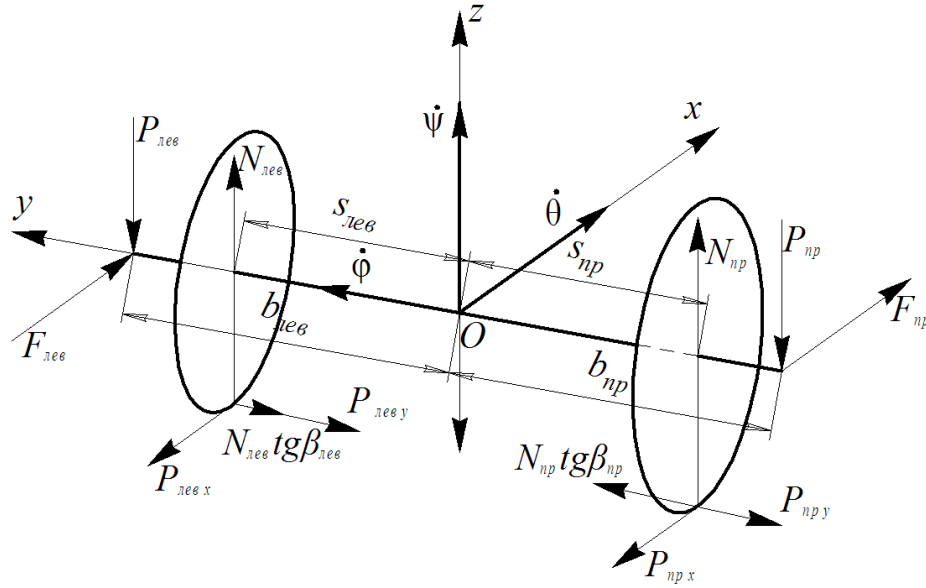


Рисунок 2.3 – Система сил, действующих на колёсную пару

Поступательная скорость движения центра масс КП вдоль оси пути равна:

$$v_x = \dot{x}, \quad (2.25)$$

тогда для правого и левого колеса соответственно имеем:

$$v_{np} = \dot{x} + \dot{\psi} s_{np}, \quad v_{лев} = \dot{x} - \dot{\psi} s_{лев}. \quad (2.26)$$

С другой стороны, скорости колес можно выразить через скорость вращения:

$$v_{np} = \dot{\phi} r'_{np}, \quad v_{лев} = \dot{\phi} r'_{лев}, \quad (2.27)$$

где:

$$r'_{np} = \frac{r_{np}}{1 + \frac{P_{np x}}{k}} = \frac{k \cdot r_{np}}{k + P_{np x}} = \frac{r_0 - n_{np} y}{1 + \frac{P_{np x}}{k}}; \quad (2.28)$$

$$r'_{лев} = \frac{r_{лев}}{1 + \frac{P_{лев x}}{k}} = \frac{k \cdot r_{лев}}{k + P_{лев x}} = \frac{r_0 + n_{лев} y}{1 + \frac{P_{лев x}}{k}}. \quad (2.29)$$

Приравняв (2.26) и (2.27), получим:

$$\begin{aligned} \dot{x} + \dot{\psi} s_{np} &= \dot{\phi} \frac{k r_{np}}{k + P_{np x}} = \frac{k(r_0 - n y)}{k + P_{np x}} \dot{\phi}, \\ \dot{x} - \dot{\psi} s_{лев} &= \dot{\phi} \frac{k r_{лев}}{k + P_{лев x}} = \frac{k(r_0 + n y)}{k + P_{лев x}} \dot{\phi}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

откуда выражаем (с учётом знака, т.е. вектор силы направлен в направлении движения):

$$\begin{aligned}
 (k + P_{\text{пр } x})(\dot{x} + \dot{\psi}s) &= k\dot{\phi}(r_0 - ny) \\
 (k + P_{\text{лев } x})(\dot{x} - \dot{\psi}s) &= k\dot{\phi}(r_0 + ny) \\
 P_{\text{пр } x} &= k \left( \frac{r_0 - ny}{\dot{x} + \dot{\psi}s} \dot{\phi} - 1 \right) = \frac{k}{\dot{x} + \dot{\psi}s_{\text{пр}}} (\dot{\phi} r_{\text{пр}} - \dot{x} - \dot{\psi} s_{\text{пр}}), \\
 P_{\text{лев } x} &= k \left( \frac{r_0 + ny}{\dot{x} - \dot{\psi}s} \dot{\phi} - 1 \right) = \frac{k}{\dot{x} - \dot{\psi}s_{\text{лев}}} (\dot{\phi} r_{\text{лев}} - \dot{x} + \dot{\psi} s_{\text{лев}}).
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

Принимая, что вектор силы направлен против движения, а также принимая конусный бандаж, получим:

$$\begin{aligned}
 P_{\text{пр } x} &= k \left( \frac{\dot{\phi} r_{\text{пр}}}{\dot{x} + \dot{\psi}s} - 1 \right), \quad \text{где: } r_{\text{пр}} = r_0 - yn_{\text{пр}}, \\
 P_{\text{лев } x} &= k \left( \frac{\dot{\phi} r_{\text{лев}}}{\dot{x} - \dot{\psi}s} - 1 \right), \quad \text{где: } r_{\text{лев}} = r_0 + yn_{\text{лев}}.
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

Учитывая теорему о движении центра масс и теорему об изменении момента количества движения, а также приняв  $s_{\text{лев}} = s_{\text{пр}} = s$ , составим дифференциальные уравнения движения колёсной пары:

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x} &= \sum F_x = F_{\text{пр}} + F_{\text{лев}} - P_{\text{пр } x} - P_{\text{лев } x} = 0; \\
 m\ddot{y} &= \sum F_y = N_{\text{пр}} n_{\text{пр}} - N_{\text{лев}} n_{\text{лев}} - F_{\text{пр } y} - F_{\text{лев } y}; \\
 m\ddot{z} &= \sum F_z = N_{\text{пр}} + N_{\text{лев}} - P_{\text{пр}} - P_{\text{лев}} = 0; \\
 J_y \ddot{\phi} &= \sum M_y(\vec{F}) = (F_{\text{пр}} + F_{\text{лев}}) r_0 - M_{\text{сопр кач}} = 0; \\
 J_x \ddot{\psi} + J_y \dot{\phi} \dot{\theta} &= \sum M_z(\vec{F}) = (P_{\text{пр } x} + P_{\text{лев } x}) s - (F_{\text{пр}} - F_{\text{лев}}) b. \\
 J_x \ddot{\theta} - J_y \dot{\phi} \dot{\psi} &= \sum M_x(\vec{F}) = -F_y r_0 + (N_{\text{лев}} - N_{\text{пр}}) s + (P_{\text{пр}} - P_{\text{лев}}) b = 0;
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Силы  $F_{\text{пр}}$  и  $F_{\text{лев}}$  обусловлены упругой связью буксовых узлов. Приняв жесткость левого и правого узла одинаковой, равной  $c$ , а  $b$  – расстояние от центра масс колёсной пары до буксового узла, получим:

$$(F_{\text{пр}} - F_{\text{лев}}) b = 2c\psi b^2 \tag{2.34}$$

Угловую скорость  $\dot{\theta}$  можно выразить как:

$$\dot{\theta} = \frac{(\dot{z}_{\text{лев}} - \dot{z}_{\text{пр}})}{2s} \approx \frac{\dot{y}(n_{\text{пр}} + n_{\text{лев}})}{2s}. \quad (2.35)$$

Из уравнений (2.33), приняв  $k = a\sqrt{N_{\text{ср}}r_0}$ ,  $N_{\text{ср}} = \frac{N_{\text{пр}} + N_{\text{лев}}}{2}$ , получим:

$$\begin{cases} m\ddot{y} = n(N_{\text{пр}} - N_{\text{лев}}) - 2k\left(\psi - \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right), \\ J_x\ddot{\psi} - J_y\frac{\dot{x}\dot{y}(n_{\text{пр}} - n_{\text{лев}})}{r_0s} = sk\left(\frac{\dot{\phi}(r_0 - yn)}{\dot{x} + \dot{\psi}s} - \frac{\dot{\phi}(r_0 + yn)}{\dot{x} - \dot{\psi}s}\right) + (F_{\text{пр}} - F_{\text{лев}})b, \\ J_x\ddot{\theta} - J_y\dot{\phi}\dot{\psi} = -k\left(\psi - \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)r_0 + (N_{\text{лев}} - N_{\text{пр}})s + (P_{\text{пр}} - P_{\text{лев}})b. \end{cases} \quad (2.36)$$

Уравнения (2.36) были решены численно для разных значений  $\dot{x}$ , частота виляния колесной пары получена с учетом гироскопического эффекта и упругого проскальзывания в пятне контакта «колесо-рельс» в зависимости от скорости движения экипажа, в сравнении с результатами, полученными по уравнению Клингеля и с учетом поправки Е. Шперлинга.

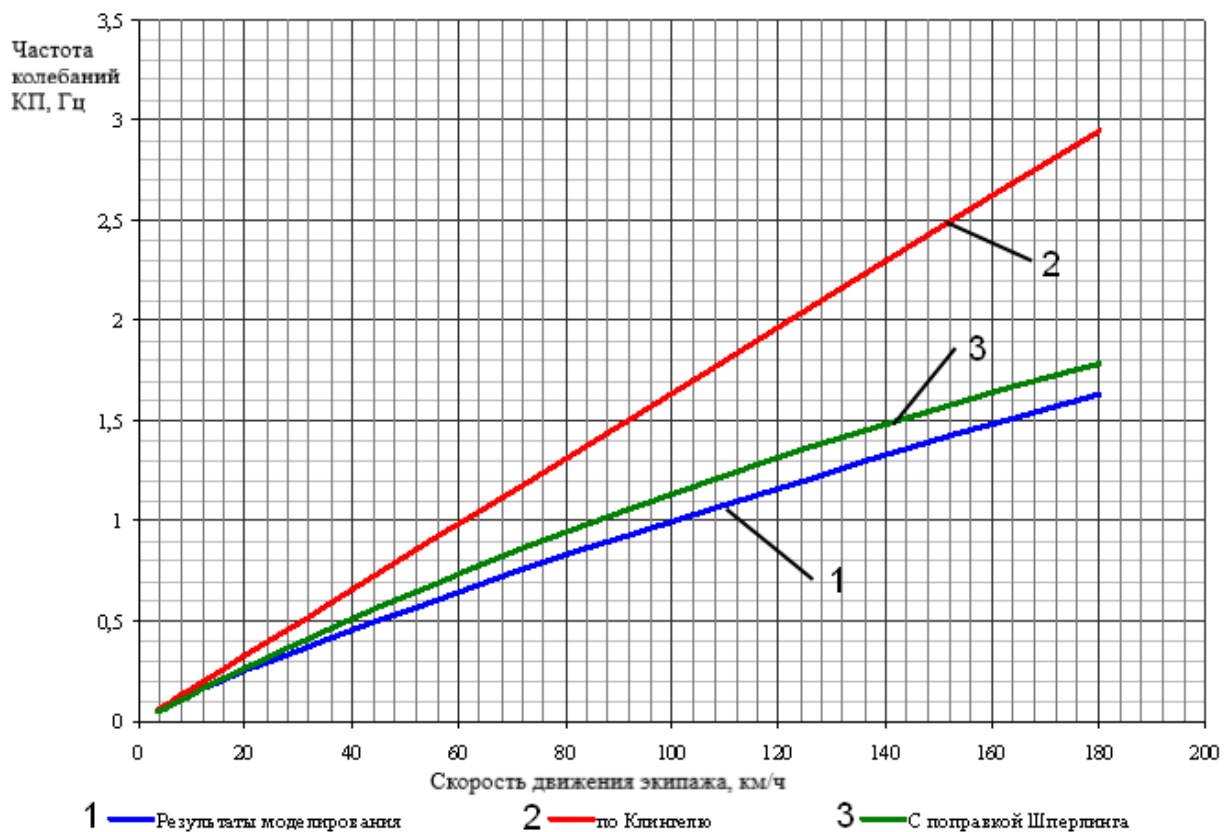


Рисунок 2.4 – Сравнение результатов численного моделирования

На рисунке 2.4 приведены результаты моделирования движения колесной пары. Необходимые инерционные характеристики получены по результатам твердотельного моделирования и вычисления тензора инерции колесной пары грузового вагона с цельнокатаными колесами и осью РУ-5 в программном пакете Solid Works [111]. Сравнение указанных кривых показывает хорошую сходимость по форме результатов, полученных автором, с результатами других исследований и позволяет определить величину отклонения частоты виляния, полученной по Клингелю от уточнённого, полученного автором с учетом гироскопических свойств колесной пары. Увеличение этого отклонения с ростом скорости экипажа подтверждает необходимость учета гироскопического эффекта, особенно для случая моделирования динамики высокоскоростных экипажей.

## 2.2 Колебания колёсной пары в постановке задачи как ротора в неравноупругих опорах

Представим колесную пару как абсолютно твердое тело с главными осями инерции, проходящими через центр масс тела (рисунки 2.5-2.7).

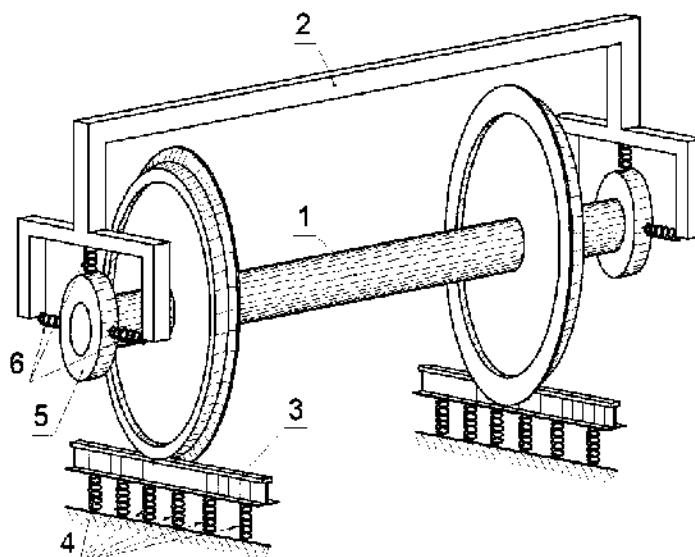


Рисунок 2.5 - Расчетная схема колесной пары в движении: 1 - колёсная пара, 2 - обрессоренная масса ходовых частей, 3 - часть путевой структуры, участвующая в вертикальном движении колёсной пары, 4 - упругие элементы, характеризующие вертикальную жесткость пути, 5 - присоединённая масса буксового элемента, не участвующая во вращении, 6 - упругие элементы буксовой ступени рессорного подвешивания

Данное тело имеет 6 степеней свободы с наложенными на него упругими связями (рельсовая нить и буксовые узлы). Колебания колёсной пары возможны из-за наличия податливости буксового адаптера и подвижности самой боковой рамы, а также упругости рельсового пути в вертикальном направлении. Таким образом, указанную на рисунке 2.5 механическую систему можно представить в виде вращающегося ротора 1 и неподвижных опорных элементов 2 и 3, также участвующих в колебаниях (см. рисунок 2.6). Очевидно, что данный ротор имеет различную упругость опор в горизонтальном и вертикальном каналах. После дальнейших преобразований можно привести жесткость упругих элементов 4 и 5 к неоднородному упругому полю, действующему в зоне единых опор ротора. Исходя из принятой модели и будет строиться в дальнейшем математическая модель малых колебаний колёсной пары в постановке задачи как ротора в анизотропных упругих опорах. В рассмотренной литературе решения задачи в подобной постановке не было найдено.

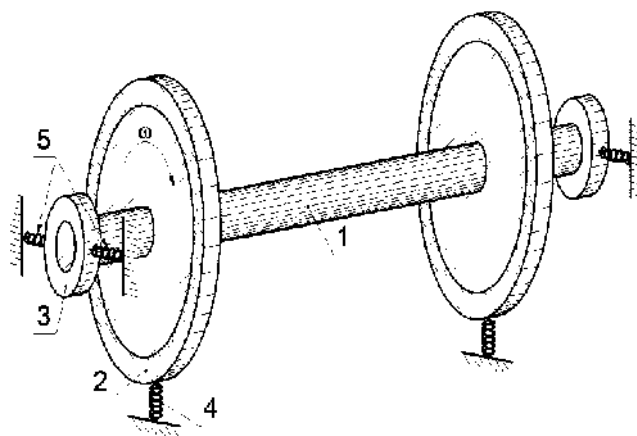


Рисунок 2.6 – Промежуточная ступень преобразования колёсной пары

1 - ротор, имитирующий колёсную пару, 2 - невращающаяся масса от рельсового пути, 3 - масса буксового узла, 4, 5- вертикальные и горизонтальные упругие элементы.

Пусть колесная пара движется прямолинейно и равномерно по рельсовому пути. Введем инерциальную систему координат  $Oxyz$  с началом в центре масс тела в положении статического равновесия. Направления осей зададим следующим образом: ось  $x$  направлена в направлении поступательного движения экипажа, ось  $y$  направлена в горизонтальной плоскости влево от направления оси  $x$ . Ось  $z$

направлена вверх и дополняет систему координат до правой. Любые движения колесной пары относительно данной системы координат отнесём к малым движениям. Введем также подвижную систему координатных осей  $O_1x_1y_1z_1$ , совпадающую с главными центральными осями инерции. Положение осей в произвольный момент времени показано на рисунке 2.7.

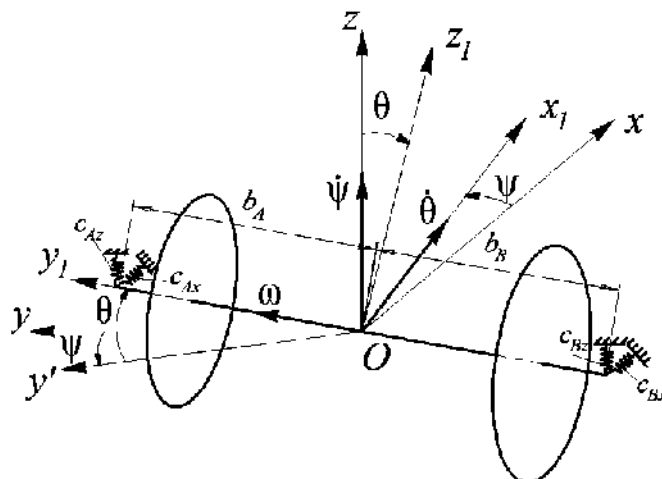


Рисунок 2.7 – Неподвижная и подвижная системы координат

Последовательность поворотов вокруг осей следующая: сначала выполняется поворот тела вокруг неподвижной оси  $z$  на угол  $\psi$  (угол виляния) в положительном направлении (от оси  $x$  к оси  $y$ ). При этом оси  $x_1$  и  $y_1$ , связанные с телом, повернутся в горизонтальной плоскости  $Oxy$  на тот же угол  $\psi$  против часовой стрелки. Затем тело поворачивается вокруг оси  $x_1$  на угол  $\theta$  (угол боковой качки) в положительном направлении (от оси  $y_1$  к оси  $z$ ). При этом левая по ходу движения букса колесной пары поднимется, а правая – опустится, т.е. оси  $y_1$  и  $z_1$  повернутся в вертикальной плоскости  $Oy_1z$  против часовой стрелки при взгляде по стороны положительного конца оси  $x_1$ . Собственное вращение тела осуществляется вокруг оси  $y_1$  на угол  $\phi$  с постоянной (в первом приближении) угловой скоростью  $\dot{\phi}$  или  $\omega$ . Тогда угловая скорость виляния  $\dot{\psi}$  полностью проецируется на ось  $z$ , а скорость боковой качки  $\dot{\theta}$  целиком проецируется на ось  $x_1$ . Таким образом, в качестве обобщенных координат, полностью определяющих положение тела, используем три координаты  $x, y, z$ , определяющие положение центра масс тела относительно инерциальной системы координат  $Oxyz$ , и три



угловых координаты  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\theta$ , являющиеся одним из вариантов углов Эйлера-Крылова и определяющих пространственную ориентацию тела. Угол собственного вращения  $\varphi$  не играет роли обобщенной координаты в данной постановке задачи в силу симметрии колесной пары относительно оси  $y_1$ , однако это не означает, что угловая скорость  $\omega$ , проецируемая на эту ось, будет равна нулю. Наоборот, она играет ключевую роль в появлении гироскопических членов в дифференциальных уравнениях движения колесной пары. Не будем, также, учитывать движение колесной пары вдоль оси  $y$ , поскольку оно оказывает малое влияние на проявление гироскопических свойств колесной пары. Это обстоятельство несколько отдалит задачу от истинного положения вещей, однако облегчит понимание влияния гироскопических свойств на «освобожденную» колесную пару. В реальности же существует зависимость координаты  $y$  (а также угла  $\psi$  и даже угла  $\theta$ ) от координаты  $x$ , выражающаяся в извилистом движении колесной пары, обусловленном конусностью бандажей колес, что необходимо учитывать. В итоге наша задача сводится к исследованию движения вращающегося ротора с четырьмя степенями свободы, закрепленного в упругих опорах.

Найдем кинетическую энергию колесной пары, которая, согласно теореме Кёнига, состоит из кинетической энергии поступательного движения центра масс тела и кинетической энергии вращательного движения тела вокруг своего центра масс:

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}_c^2 + \dot{z}_c^2) + \frac{1}{2} J_y \omega_{y1}^2 + \frac{1}{2} J_z (\omega_{x1}^2 + \omega_{z1}^2), \quad (2.37)$$

где  $m$  – масса тела,  $\dot{x}_c$ ,  $\dot{z}_c$  – скорости центра масс тела в проекции на неподвижные оси,  $\omega_{x1}$ ,  $\omega_{y1}$ ,  $\omega_{z1}$  – проекции угловой скорости тела на подвижные оси координат,  $J_y$  – момент инерции колесной пары вокруг собственной оси вращения  $y_1$ ,  $J_z$  – момент инерции колесной пары вокруг вертикальной оси  $z_1$ , в силу симметрии равный  $J_x$ . Угловая скорость колесной пары состоит из трех составляющих: собственной угловой скорости  $\omega$ , угловой скорости вилания  $\dot{\psi}$  и боковой качки  $\dot{\theta}$ . Находим значения проекций угловых скоростей с учётом знаков:

$$\begin{aligned}\omega_{x_1} &= \dot{\theta}, \\ \omega_{y_1} &= \omega + \dot{\psi} \sin \theta \approx \omega + \dot{\psi} \theta, \\ \omega_{z_1} &= \dot{\psi} \cos \theta \approx \dot{\psi}.\end{aligned}\quad (2.38)$$

Подставим полученные значения в выражение кинетической энергии:

$$T = \frac{1}{2} m(x_C^2 + z_C^2) + \frac{1}{2} J_y (\omega + \dot{\psi} \theta)^2 + \frac{1}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2). \quad (2.39)$$

Потенциальная энергия равна:

$$\Pi = \frac{1}{2} (c_{Ax} x_1^2 + c_{Az} z_1^2 + c_{Bx} x_2^2 + c_{Bz} z_2^2), \quad (2.40)$$

где  $x_1, z_1, x_2, z_2$  – координаты левой и правой буксы колеса,  $c_{Ax}, c_{Az}, c_{Bx}, c_{Bz}$  – продольная и вертикальная жесткость левого и правого буксового узла. Вычислим координаты буксового узла, задав  $b$  как расстояние от центра масс до левой и правой буксы соответственно:

$$\begin{aligned}x_1 &= x_C - \psi b, \\ x_2 &= x_C + \psi b, \\ z_1 &= z_C + \theta b, \\ z_2 &= z_C - \theta b.\end{aligned}\quad (2.41)$$

Тогда потенциальную энергию можно записать в виде:

$$\Pi = \frac{1}{2} c_{Ax} (x_C - \psi b)^2 + \frac{1}{2} c_{Bx} (x_C + \psi b)^2 + \frac{1}{2} c_{Az} (z_C + \theta b)^2 + \frac{1}{2} c_{Bz} (z_C - \theta b)^2. \quad (2.42)$$

Подставив полученные значения кинетической и потенциальной энергии (после дифференцирования) в уравнение Лагранжа II рода для консервативной системы

$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0$ , получим систему уравнений движения:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_C + x_C (c_{Ax} + c_{Bx}) + \psi b (c_{Bx} - c_{Ax}) = 0, \\ m\ddot{z}_C + z_C (c_{Az} + c_{Bz}) + \theta b (c_{Az} - c_{Bz}) = 0, \\ (J_y \theta^2 + J_z) \ddot{\psi} + 2J_y \dot{\psi} \dot{\theta} + J_y \omega \dot{\theta} + \psi b^2 (c_{Ax} + c_{Bx}) + x_C b (c_{Ax} - c_{Bx}) = 0, \\ J_z \ddot{\theta} - J_y \dot{\psi}^2 \theta - J_y \omega \dot{\psi} + \theta b^2 (c_{Az} + c_{Bz}) + z_C b (c_{Az} - c_{Bz}) = 0. \end{cases} \quad (2.43)$$

Если принять коэффициент упругости элементов крепления левого и правого буксового узла в соответствующем направлении одинаковым и заменить их сумму приведенной жесткостью  $c_x$  и  $c_z$  соответственно, а также исключить величины второго порядка малости, получим следующую систему однородных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_C + c_x x_C = 0, \\ m\ddot{z}_C + c_z z_C = 0, \\ J_z \ddot{\psi} + J_y \omega \dot{\theta} + c_x b^2 \psi = 0, \\ J_z \ddot{\theta} - J_y \omega \dot{\psi} + c_z b^2 \theta = 0. \end{cases} \quad (2.44)$$

Первые два уравнения представляют собой уравнения свободных колебаний пружинного маятника. Если принять  $\omega$  равной нулю, то вторая пара уравнений представляет собой уравнения крутильных колебаний. Однако присутствие в уравнениях гироскопических членов  $J_y \omega \dot{\theta}$  и  $J_y \omega \dot{\psi}$  вынуждает ось колесной пары описывать в пространстве коническую поверхность – прецессировать. При этом конец оси совершает малые колебания около траектории прецессионного движения – нутацию. Третье и четвертое уравнение системы (2.44) представляют собой однородные дифференциальные уравнения второго порядка и могут быть решены аналитически, в результате чего могут быть получены собственные частоты колебаний, которые отличаются от собственной частоты колебаний тела при отсутствии вращения колесной пары тем больше, чем больше угловая скорость  $\omega$  [69].

Пример численного решения этих уравнений показан на рисунке 2.8 для значения угловой скорости 75 рад/с, что соответствует 125 км/ч при диаметре колеса 0,95 м. Вертикальная жесткость принята равной 4 МН/м, горизонтальная – 450 кН/м. Моменты инерции колесной пары приняты равными:  $J_z = 520 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ,  $J_y = 105 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ . Начальные условия:  $\psi_0 = 0,005 \text{ рад}$ ,  $\theta_0 = 0$ ,  $\dot{\psi}_0 = \dot{\theta}_0 = 0$ . На рисунке 2.8 также приведён график изменения динамической реакции одной из опор, из которого видно, что на опору помимо основной частоты колебаний прецессии воздействует дополнительная вибрационная нагрузка, вызванная нутацией оси.

Это обстоятельство необходимо учитывать при расчёте долговечности подшипников опор.

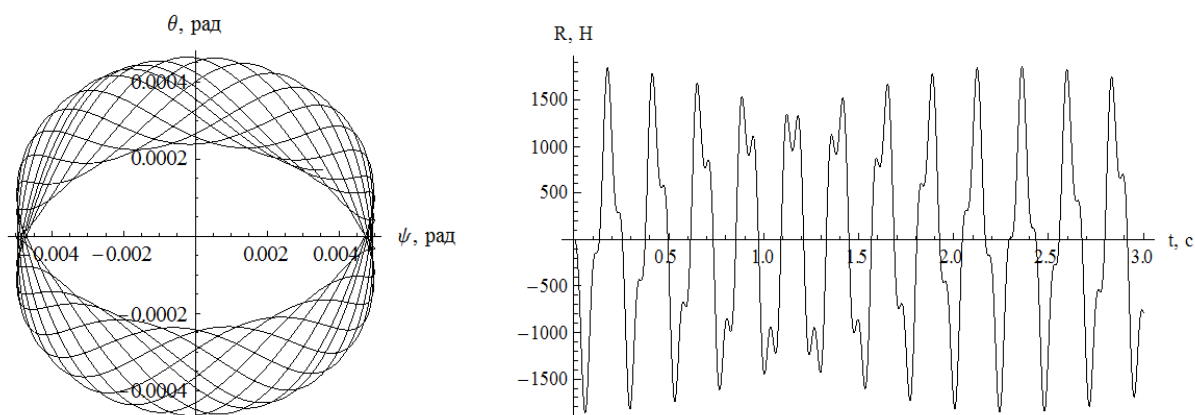


Рисунок 2.8 - Прецессия оси колесной пары и реакция опоры

Явления, связанные с влиянием гироскопических сил на движение быстро вращающихся роторов на упругих опорах, разобраны автором далее, а также в [69], а оценка вклада гироскопических моментов колесных пар в динамику взаимодействия колесо-рельс сделана в [53].

### 2.3 Определение собственных и резонансных частот колёсной пары

Для оценки собственных частот колебаний колесной пары составим дифференциальные уравнения её движения, используя в качестве обобщённых координат координаты буксовых узлов.

Используем модель колёсной пары как ротора в неравноупругих опорах, предложенную ранее (см. рисунок 2.7). Упругие элементы в вертикальном канале представляют собой приведенную жесткость опор буксовых узлов и рельсошпальной решетки. Системы осей координат заданы, как было описано в [68], а именно: оси  $O_1x_1y_1z_1$  – жестко связаны с колёсной парой, а система координат  $Oxyz$  представляет начальное положение осей, и в дальнейшем движется прямолинейно и поступательно. Следует отметить, что в данной постановке задача движения ротора ранее не рассматривалась, однако, в [1] было приведено решение для консольного ротора в неравноупругих опорах, а в [2] рассмотрена

задача определения малых колебаний для ротора в опорах, имеющих изотропное упругое поле в плоскости, перпендикулярной оси вращения.

Запишем выражения проекций угловой скорости на оси  $O_1x_1y_1z_1$ , связанные с колёсной парой:

$$\begin{cases} \omega_{x1} = \dot{\theta}, \\ \omega_{y1} = \omega + \dot{\psi}\theta, \\ \omega_{z1} = \dot{\psi}. \end{cases} \quad (2.45)$$

Также запишем проекции кинетического момента вращающейся колёсной пары на оси  $Oxyz$ :

$$\begin{cases} K_x = J_z \dot{\theta} - J_y \omega \psi, \\ K_y = J_y \omega, \\ K_z = J_z \dot{\psi} + J_y \omega \theta. \end{cases} \quad (2.46)$$

где  $J_y$  – момент инерции колёсной пары относительно собственной оси вращения,  $J_z$  – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно к собственной оси вращения колесной пары.

Определим положение колесной пары в произвольный момент времени, используя в качестве обобщенных координат перемещение буксовых узлов, задающее, в то же время, деформации соответствующих эквивалентных упругих элементов. Примем одинаковыми расстояния от центра масс до левой и правой букс соответственно  $b_A = b_B = b$ :

$$\begin{aligned} x_A &= x_C - \psi b; & x_B &= x_C + \psi b; \\ z_A &= z_C + \theta b; & z_B &= z_C - \theta b, \end{aligned} \quad (2.47)$$

(здесь и далее индекс  $A$  соответствует левой буксе по ходу движения экипажа,  $B$  – правой).

Из уравнений (2.47) выразим координаты центра масс и углы поворота колёсной пары:

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{x_A + x_B}{2}; & z_C &= \frac{z_A + z_B}{2}; \\ \theta &= \frac{z_A - z_B}{2b}; & \psi &= \frac{x_B - x_A}{2b}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Как было оговорено ранее, коэффициент упругости левого и правого буксовых узлов в соответствующем направлении принимаем одинаковой:  $c_x = c_{xA} = c_{xB}$  и  $c_z = c_{zA} = c_{zB}$ . С учетом этого, запишем моменты внешних сил в проекции на оси  $Oxyz$ :

$$\begin{cases} \sum M_{Cx} = (z_B - z_A) c_z b, \\ \sum M_{Cy} = 0, \\ \sum M_{Cz} = (x_A - x_B) c_x b. \end{cases} \quad (2.49)$$

Учитывая теорему об изменении кинетического момента, запишем её для нашего случая:

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum M_{Cx}, \quad \frac{dK_z}{dt} = \sum M_{Cz},$$

на основе которой с учетом (2.46) и (2.49) получим:

$$\begin{cases} J_z \ddot{\theta} - J_y \omega \dot{\psi} = (z_B - z_A) c_z b, \\ J_z \ddot{\psi} + J_y \omega \dot{\theta} = (x_A - x_B) c_x b. \end{cases} \quad (2.50)$$

Запишем уравнения движения центра масс колесной пары:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_C = -c_x(x_A + x_B), \\ m\ddot{z}_C = -c_z(z_A + z_B). \end{cases} \quad (2.51)$$

Подставляя в (2.50) и (2.51) уравнения (2.48), запишем систему дифференциальных уравнений движения вращающегося ротора в симметричных опорах, имеющих различную жесткость в вертикальном и горизонтальном направлениях:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_A + 2c_x x_A + m\ddot{x}_B + 2c_x x_B = 0, \\ m\ddot{z}_A + 2c_z z_A + m\ddot{z}_B + 2c_z z_B = 0, \\ J_z(\ddot{z}_A - \ddot{z}_B) + J_y \omega(\dot{x}_A - \dot{x}_B) + 2c_z b^2(z_A - z_B) = 0, \\ J_z(\ddot{x}_A - \ddot{x}_B) - J_y \omega(\dot{z}_A - \dot{z}_B) + 2c_x b^2(x_A - x_B) = 0. \end{cases} \quad (2.52)$$

Учитывая явно колебательный характер малых движений системы, для отыскания частного решения системы (2.52), примем следующий вид координат:

$$\begin{cases} x_A = D_1 \sin(pt + \alpha), \\ x_B = D_2 \sin(pt + \alpha), \\ z_A = D_3 \cos(pt + \alpha), \\ z_B = D_4 \cos(pt + \alpha). \end{cases} \quad (2.53)$$

Продифференцируем (2.53) по времени два раза:

$$\begin{cases} \dot{x}_A = D_1 p \cos(pt + \alpha), \\ \dot{x}_B = D_2 p \cos(pt + \alpha), \\ \dot{z}_A = -D_3 p \sin(pt + \alpha), \\ \dot{z}_B = -D_4 p \sin(pt + \alpha). \end{cases} \quad (2.54)$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_A = -D_1 p^2 \sin(pt + \alpha), \\ \ddot{x}_B = -D_2 p^2 \sin(pt + \alpha), \\ \ddot{z}_A = -D_3 p^2 \cos(pt + \alpha), \\ \ddot{z}_B = -D_4 p^2 \cos(pt + \alpha). \end{cases} \quad (2.55)$$

Подставив в (2.52) выражения (2.53), (2.54), (2.55), и сократив на  $\sin(pt+\alpha)$  и  $\cos(pt+\alpha)$ , получим:

$$\begin{cases} -mD_1 p^2 + 2c_x D_1 - mD_2 p^2 + 2c_x D_2 = 0, \\ -mD_3 p^2 + 2c_z D_3 - mD_4 p^2 + 2c_z D_4 = 0, \\ -J_z (D_3 - D_4) p^2 + J_y \omega (D_1 - D_2) p + 2c_z b^2 (D_3 - D_4) = 0, \\ J_z (D_1 - D_2) p^2 - J_y \omega (D_3 - D_4) p - 2c_x b^2 (D_1 - D_2) = 0. \end{cases} \quad (2.56)$$

Перегруппируем слагаемые:

$$\begin{cases} (2c_x - mp^2)(D_1 + D_2) = 0, \\ (2c_z - mp^2)(D_3 + D_4) = 0, \\ J_y \omega p (D_1 - D_2) + (2c_z b^2 - J_z p^2)(D_3 - D_4) = 0, \\ -(2c_x b^2 - J_z p^2)(D_1 - D_2) - J_y \omega p (D_3 - D_4) = 0. \end{cases} \quad (2.57)$$

В случае, если  $2c_x \neq mp^2$  и  $2c_z \neq mp^2$ ,  $D_1 = -D_2$  и  $D_3 = -D_4$ , то есть  $D_1 - D_2 = 2D_1 = -2D_2$  и  $D_3 - D_4 = 2D_3 = -2D_4$ . Тогда система (2.57) распадается на две:

$$\begin{cases} (2c_x - mp^2) = 0, \\ (2c_z - mp^2) = 0. \end{cases} \quad (2.58)$$

$$\begin{cases} J_y \omega p D_1 + (2c_z b^2 - J_z p^2) D_3 = 0, \\ -(2c_x b^2 - J_z p^2) D_1 - J_y \omega p D_3 = 0. \end{cases} \quad (2.59)$$

Очевидно, что система (2.58) представляет собой два независимых уравнения поступательных колебаний центра масс колесной пары в горизонтальном и вертикальном направлениях. Собственные частоты этих колебаний равны:

$$p_1 = \sqrt{\frac{2c_x}{m}}, \quad p_2 = \sqrt{\frac{2c_z}{m}},$$

что соответствует известным уравнениям собственных круговых частот пружинного маятника.

Чтобы получить частотное уравнение системы (2.59), приравняем ее определитель к нулю:

$$\begin{aligned} -J_y^2 \omega^2 p^2 + (2c_x b^2 - J_z p^2)(2c_z b^2 - J_z p^2) &= 0. \\ J_z^2 p^4 - (2c_x b^2 J_z + 2c_y b^2 J_z + J_y^2 \omega^2) p^2 + 4c_x c_z b^4 &= 0. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Для решения полученного биквадратного уравнения введём в (2.60) замену  $p^2 = \lambda$ :

$$J_z^2 \lambda^2 - (2c_x b^2 J_z + 2c_y b^2 J_z + J_y^2 \omega^2) \lambda + 4c_x c_z b^4 = 0. \quad (2.61)$$

Тогда корни уравнения (2.61) равны:

$$\lambda_{1,2} = \frac{2(c_x + c_z) J_z b^2 + J_y^2 \omega^2 \pm \sqrt{J_y^4 \omega^4 + 4J_y^2 J_z b^2 \omega^2 (c_x + c_z) + 4J_z^2 b^4 (c_x - c_z)^2}}{2J_z^2}. \quad (2.62)$$

При значениях переменных, соответствующих реальным значениям параметров конструкции тележки, исходное биквадратное уравнение имеет две пары действительных симметричных корней:

$$p_{1,3} = \pm \sqrt{\lambda_1}, \quad p_{2,4} = \pm \sqrt{\lambda_2}, \quad (2.63)$$

в которых отрицательные корни могут быть отброшены, как не несущие дополнительной информации о собственных частотах. С физической точки зрения уравнения (2.63) представляют собой выражения для собственных частот



крутильных колебаний относительно вертикальной ( $p_1$ ) и горизонтальной ( $p_2$ ) осей координат, проходящих через центр масс колёсной пары. После подстановки (2.62) в (2.63) и исключения симметричных отрицательных корней, уравнение собственных частот примет вид:

$$P_{1,2} = \sqrt{\frac{2(c_x + c_z)J_z b^2 + J_y^2 \omega^2 \pm \sqrt{J_y^4 \omega^4 + 4J_y^2 J_z b^2 \omega^2 (c_x + c_z) + 4J_z^2 b^4 (c_x - c_z)^2}}{2J_z^2}}. \quad (2.64)$$

Если принять угловую скорость колёсной пары равной нулю, корни уравнения принимают вид:

$$p_1 = \sqrt{\frac{2b^2 c_x}{J_z}}; \quad p_2 = \sqrt{\frac{2b^2 c_z}{J_z}}, \quad (2.65)$$

что соответствует выражениям собственной частоты крутильного маятника.

Анализ уравнения (2.64) показывает, что для конкретно взятого ротора, его собственные частоты являются функцией угловой скорости. Для оценки влияния скорости вращения вагонной колесной пары с цельнокатаными колёсами на её собственные частоты, были выполнены расчёты при следующих исходных данных: моменты инерции  $J_z = 825 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ,  $J_y = 110 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ , коэффициент упругости буксовых узлов  $c_x = 450 \text{ кН/м}$ ,  $c_z = 4 \text{ МН/м}$  и расстояние между буксами  $2b = 2,04 \text{ м}$ . На основе расчётов можно сделать вывод, что увод частоты на скорости до 200 км/ч составил не более 1,5%. Собственные частоты, приведенные от круговой частоты к принятым в технике единицам измерения, составили 5,3 Гц и 16 Гц.

Как известно, резонансные явления могут возникать при совпадении частоты вынуждающего периодического воздействия с собственной частотой колебательной системы. Причем, при малом демпфировании и длительном воздействии амплитуда колебаний может достигать значительных величин даже при небольшой амплитуде вынуждающей силы. В качестве такой вынуждающей силы может выступать статический или динамический дисбаланс колёсной пары, неровность на поверхности катания колеса или периодическая неровность рельсового пути. В случае, к примеру, дисбаланса ротора, частота вынуждающей силы равна частоте вращения. Нетрудно заметить, что для параметров вагонной

колёсной пары, значения которых были приняты в качестве расчётных, резонансным частотам при дисбалансе соответствует скорость 57 км/ч и 172 км/ч, причем при достижении первого значения скорости возникают преимущественно колебания вокруг вертикальной оси, вторая скорость порождает колебания вокруг продольной горизонтальной оси. Нетрудно заметить, что первое значение скорости соответствует эксплуатационным скоростям движения, на которой возможно продолжительное движение, а, следовательно, возникающие колебания способны оказывать дополнительную знакопеременную нагрузку в горизонтальном направлении, оказывая динамическое воздействие на челюсти буксового проёма.

Для борьбы с резонансными явлениями можно применить следующие способы: изменение параметров колебательной системы с целью ухода резонансной частоты в зону неэксплуатационных режимов и демпфирование колебаний, которое позволяет снизить амплитуду колебаний резонансного пика. Очевидно, что существенное изменение массо-инерционных характеристик ходовых частей технически мало осуществимо, единственным способом влияния на собственные частоты является варьирование параметров жесткости элементов сопряжения узлов конструкции. В задаче колебаний колёсной пары как ротора ими являются буксовые элементы, а также приведённая жесткость рельсового пути и подрельсового основания. Ряд численных экспериментов, проведенных с целью оценки влияния изменения коэффициентов упругости буксовых узлов на изменение собственной частоты в зависимости от угловой скорости вращения (для удобства приведённой к поступательной скорости экипажа) позволил интерпретировать полученные результаты в виде графических зависимостей, показанных на рисунках 2.9 и 2.10. В качестве исходных расчетных данных приняты параметры колесной пары для обеспечения скоростного движения:  $J_z = 950 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ,  $J_y = 200 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ , и при расстоянии между буксовыми опорами  $2b = 2,04 \text{ м}$ . Увеличение момента инерции колесных пар обусловлено большей массой бандажей, наличием тормозных дисков у нетяговых экипажей, либо наличием зубчатого колеса моторного редуктора у тяговых железнодорожных

экипажей. Эквивалентная горизонтальная жесткость буксовых опор увеличена до  $c_x = 650$  кН/м. Значения вертикальной жесткости задавались равными  $c_z = 1,5; 2,5$  и  $4,5$  МН/м. Как отражено на графиках, согласно расчетам изменение (увод) собственной частоты при жесткости  $1,5$  МН/м достигает  $27\%$  при скорости  $350$  км/ч, (увеличение с начальных  $9,1$  Гц до  $11,5$  Гц при  $350$  км/ч). При этом скорость наступления второго резонанса составила  $118$  км/ч. При  $c_z = 2,5$  МН/м изменение собственной частоты составило  $15\%$  (увеличение с  $11,8$  Гц до  $13,5$  Гц). Скорость наступления второго резонанса –  $151$  км/ч. Увеличение вертикальной жесткости до  $4,5$  МН/м позволило снизить максимальный увод частоты до  $8\%$  (изменение от  $15,8$  Гц до  $17$  Гц) и поднять резонансную скорость до  $201$  км/ч. Варьирование вертикальной жесткости не вызвало существенного изменения частоты первого резонанса, который наступал при скорости  $74$  км/ч.

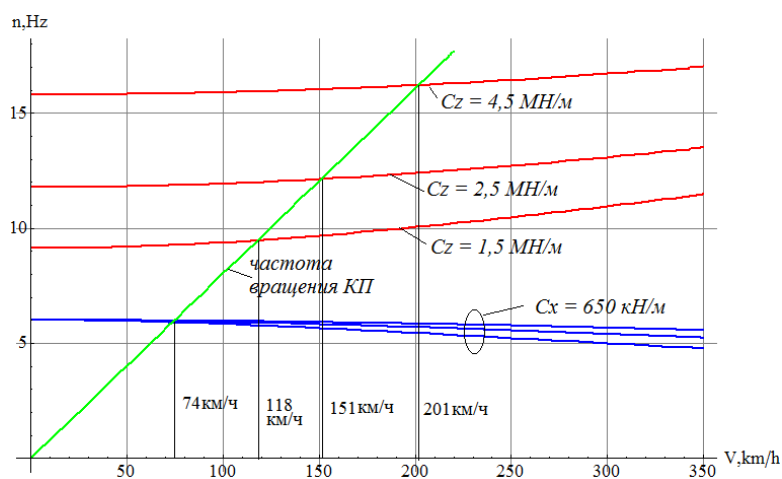


Рисунок 2.9 – Влияние вертикальной жесткости опоры на изменение собственных частот колёсной пары

С целью оценки влияния горизонтальной жесткости буксовых опор на увод частот и скорости возникновения резонансных явлений были проведены расчеты при трёх вариантах жёсткости связи буксового узла в горизонтальном направлении:  $c_x = 350$  кН/м,  $650$  кН/м и  $950$  кН/м и постоянной вертикальной жёсткости  $c_z = 4,5$  МН/м. На рисунке 2.10 приведены результаты расчётов. Как видно из графиков, увод частоты с ростом скорости значительно менее выражен, однако резонансные частоты лежат в зоне эксплуатационных скоростей ( $55, 76$  и

91 км/ч соответственно). Длительное движение на указанных скоростях вызывает проявление дополнительных резонансных динамических воздействий, что может являться причиной превышения расчётных вибрационных нагрузок на буксовые узлы и ходовые части первой ступени рессорного подвешивания.

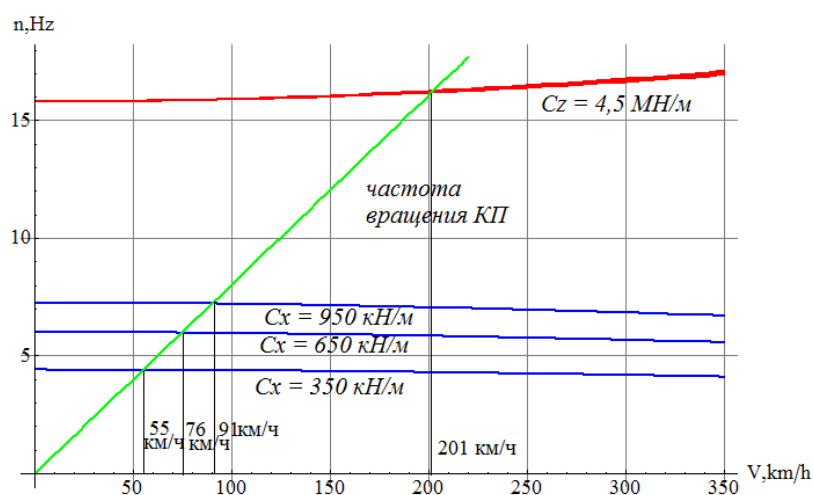


Рисунок 2.10 – Влияние продольной жесткости опор на изменение собственных частот колёсной пары

Расчётами, приведенными выше, доказано, что влияние гироскопических свойств проявляется в появлении дополнительных резонансных частот, отмечено явление увода собственной частоты колебаний с ростом скорости собственного вращения колёсной пары. Это доказывает выдвинутое предположение, что при проектировании высокоскоростных экипажей должно учитываться гироскопические явления, так как расчет собственной частоты без учёта вращения колёсной пары не гарантирует отсутствие возникновения резонансных явлений при движении на высоких скоростях. На основе приведенных расчетов можно сделать вывод, что, при движении на высоких скоростях возможно возникновение второго резонанса, вызывающего повышенное вертикальное динамическое воздействие в зоне контакта колесо-рельс и привести к превышению допустимых контактных напряжений. Существенное влияние на частоту второго резонанса оказывает жесткость рельсового пути, работающая параллельно упругим элементам буксовой опоры.

## 2.4 Динамические реакции буксовых узлов, обусловленные гироскопическим эффектом вращающейся колёсной пары

Представляет практический интерес оценка вклада гироскопического момента в динамическую нагруженность буксовых узлов, в особенности на резонансных частотах, которые были выявлены в предыдущих расчётах. Для этого необходимо провести численный эксперимент с использованием двух моделей, одна из которых включает в дифференциальные уравнения движения гироскопические слагаемые, а другая основана на предположении о том, что вклад гироскопических слагаемых от вращения КП весьма мал и ими можно пренебречь. Решение дифференциальных уравнений осуществляется с использованием численных методов относительно линейных перемещений буксовых узлов. Это позволяет оценить деформацию упругих элементов буксового узла, что, с учётом жесткости, даёт искомую силу реакции. Результаты этих исследований включены в таблицы 2.1 и 2.2. В ячейках таблицы занесены значения расчётной динамической реакции по модели №1, содержащей гироскопические слагаемые в уравнениях движения, по модели №2, не учитывающей гироскопические свойства колёсных пар, а также величина процентной разницы между значениями динамических реакций, определяемых по предлагаемой автором модели, учитывающей гироскопические свойства КП, по отношению к упрощенной. Знак «минус» в ячейках таблицы указывает на то, что значение расчётной динамической реакции, вычисленной с использованием упрощенной модели, ниже, чем в модели, полученной автором.

Анализ результатов численного моделирования, приведённых на графиках ниже (рисунки 2.12-2.19) показывает, что резонанс возникает на частотах, соответствующих совместному решению уравнения, описывающего частоту возмущающего воздействия и уравнения (2.64). Для заданных в численном расчёте параметров ротора она составила для нижнего резонанса  $p_1 = 46,5 \text{ с}^{-1}$ , для верхнего резонанса  $p_2 = 104,5 \text{ с}^{-1}$ . Кроме того, на графиках можно отметить изменение частоты резонанса по сравнению с моделью, не учитывающей

гироскопические свойства, обусловленные вращением колёсной пары. Это изменение наиболее ощутимо для случая второго резонанса из-за увода собственной частоты.

На рисунке 2.11 приведена сравнительная оценка динамических реакций при расчете по двум моделям: с учетом и без учета гироскопических слагаемых в уравнениях движения. Приведенный график построен путем деления динамической реакции, рассчитанной по модели не учитывающей гироскопические свойства колёсных пар на значение динамической реакции, полученной при тех же условиях с применением модели автора, и приведением к процентной норме, иллюстрирует различие динамических реакций выраженное в существенном занижении оценки ожидаемой динамической реакции. Данное занижение присутствует практически во всем диапазоне эксплуатационных частот вращения и достигает 80% в зоне первого резонанса, возникающего при относительно низких скоростях движения.

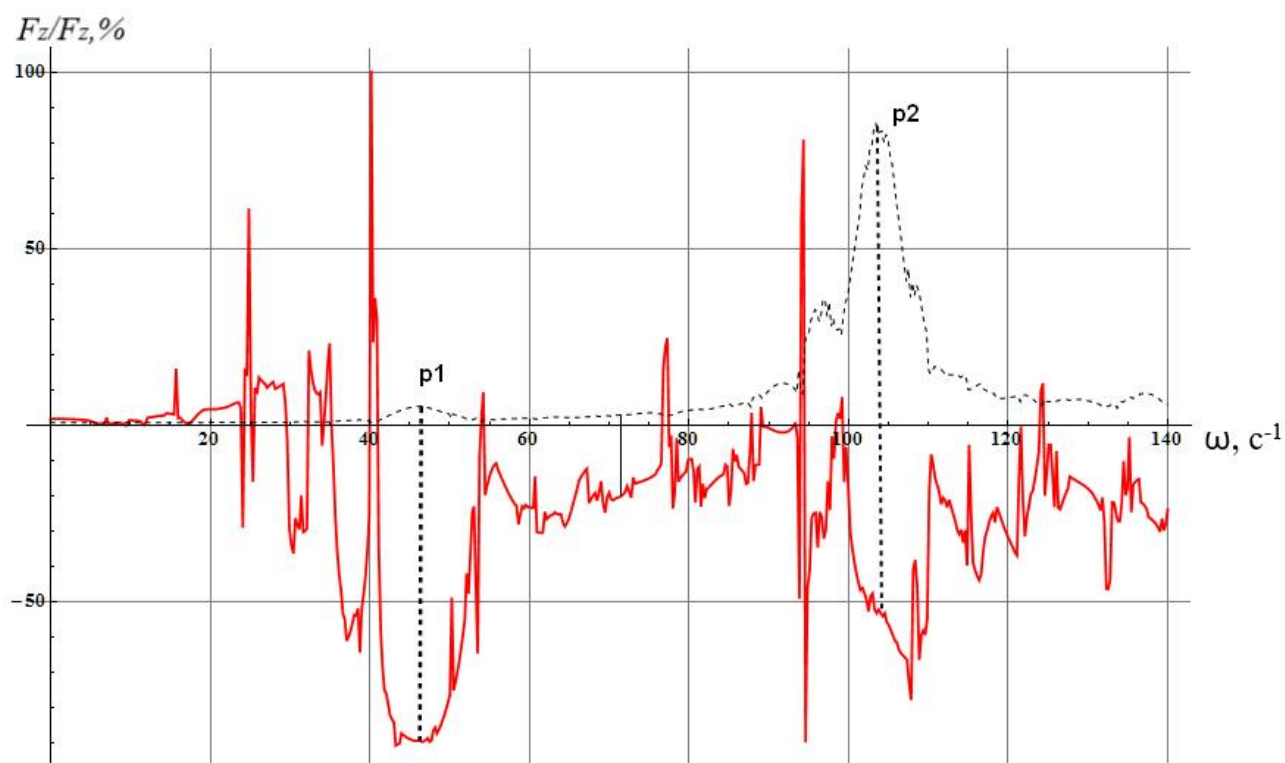


Рисунок 2.11 – Относительная характеристика занижения стандартной моделью значения динамических реакций буксового узла по оси  $z$  при коэффициенте вязкого сопротивления  $\beta = 10 \text{ Н} \cdot \text{с}/\text{м}$ .

Таблица 2.1 - Результаты исследования влияния гироскопических слагаемых на величину горизонтальной динамической реакций  $F_x$  связей буксового узла

Угловая скорость вращения колёсной пары (рад/с)	Поступательная скорость колёсной пары $v$ , м/с (км/ч)	Коэффициенты демпфирования упругих элементов $\beta$ , Н·с/м											
		10			100			1000			10000		
		Расчётное усилие по модели №1, Н	Расчётное усилие по модели №2, Н	Разница результатов между моделью №2 и моделью №1, %	Расчётное усилие по модели №1, Н	Расчётное усилие по модели №2, Н	Разница результатов между моделью №2 и моделью №1, %	Расчётное усилие по модели №1, Н	Расчётное усилие по модели №2, Н	Разница результатов между моделью №2 и моделью №1, %	Расчётное усилие по модели №1, Н	Расчётное усилие по модели №2, Н	Разница результатов между моделью №2 и моделью №1, %
30	14,3 (51)	49	90	84%	75	66	-12%	54	55	2%	30	30	0%
46,5	22 (80)	4855	4034	-17%	4536	3428	-24%	1083	1099	1%	124	129	4%
80	38 (136)	92	136	48%	67	92	37%	62,3	86	38%	84	105	25%
104,5	50 (178)	895	120	-87%	519	69	-87%	370	67	-82%	131	101	-23%
130	62 (222)	122	115	-6%	77	51	-34%	71	49	-31%	133	88	-34%

Таблица 2.2 - Результаты исследования влияния гироскопических слагаемых на величину вертикальной динамической реакций  $F_z$  связей буксового узла

Угловая скорость вращения колёсной пары (рад/с)	Поступательная скорость колёсной пары $v$ , м/с (км/ч)	Коэффициенты демпфирования упругих элементов $\beta$ , Н·с/м											
		10			100			1000			10000		
		Расчётное усилие по модели №1, Н	Расчётное усилие по модели №2, Н	Разница результатов между моделью №2 и моделью №1, %	Расчётное усилие по модели №1, Н	Расчётное усилие по модели №2, Н	Разница результатов между моделью №2 и моделью №1, %	Расчётное усилие по модели №1, Н	Расчётное усилие по модели №2, Н	Разница результатов между моделью №2 и моделью №1, %	Расчётное усилие по модели №1, Н	Расчётное усилие по модели №2, Н	Разница результатов между моделью №2 и моделью №1, %
30	14,3 (51)	30	26	-13%	31	22	-29%	18,5	22	19%	21	22	5%
46,5	22 (80)	853	96	-89%	709	70	-90%	187	71	-62%	73	71	-3%
80	38 (136)	644	619	-4%	483	460	-5%	522	463	-11%	464	414	-11%
104,5	50 (178)	17237	4237	-75%	11945	5421	-55%	9134	4650	-49%	1425	1287	-10%
130	62 (222)	1123	1419	26%	825	748	-9%	811	547	-33%	837	670	-20%

Ниже на рисунках 2.12-2.19 приведены результаты расчётов проведенных для оценки влияния коэффициента вязкого сопротивления демпфера на реакции, возникающие в буксовых узлах, полученные с использованием двух математических моделей:

- модель №1, учитывающая гироскопические свойства, обусловленные вращением колёсной пары (графики синего цвета);
- модель №2, упрощенная, не учитывающая гироскопический эффект от вращения колёсной пары (графики красного цвета).

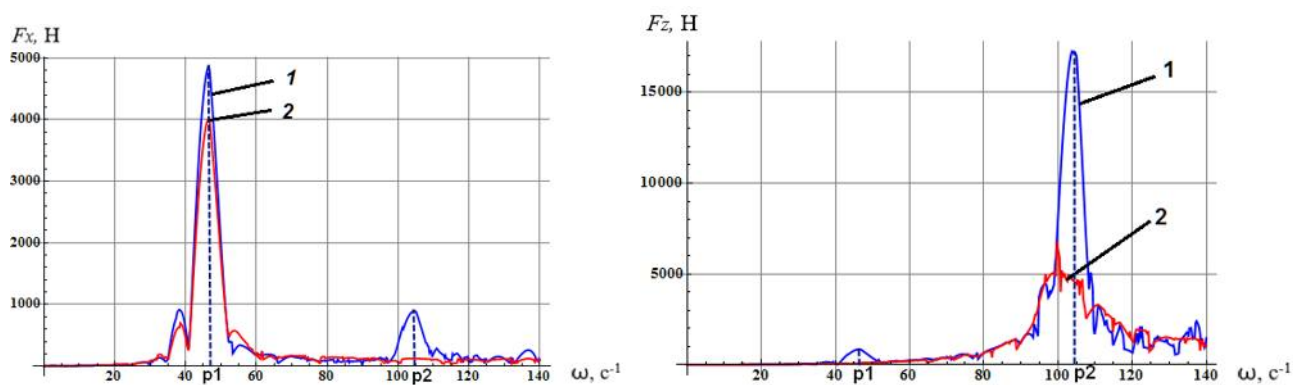


Рисунок 2.12 – Зависимость амплитуды динамических реакций буксового узла по осям  $x$  и  $z$  от угловой скорости колесной пары при коэффициенте вязкого сопротивления  $\beta = 10 \text{ Н}\cdot\text{с}/\text{м}$

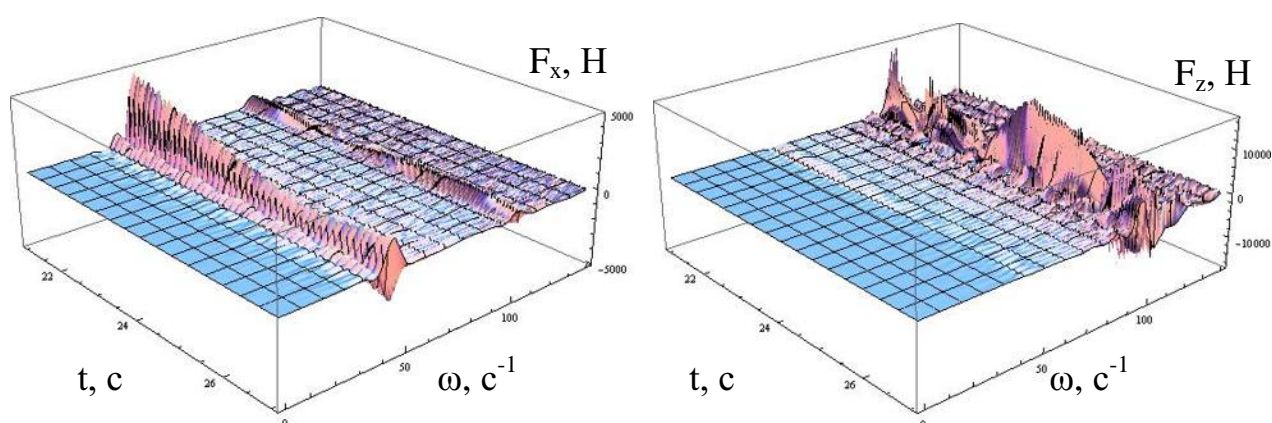


Рисунок 2.13 - Изменение динамических реакций буксового узла по осям  $x$  и  $z$  в поле параметров «время-угловая скорость» при коэффициенте вязкого сопротивления  $\beta = 10 \text{ Н}\cdot\text{с}/\text{м}$



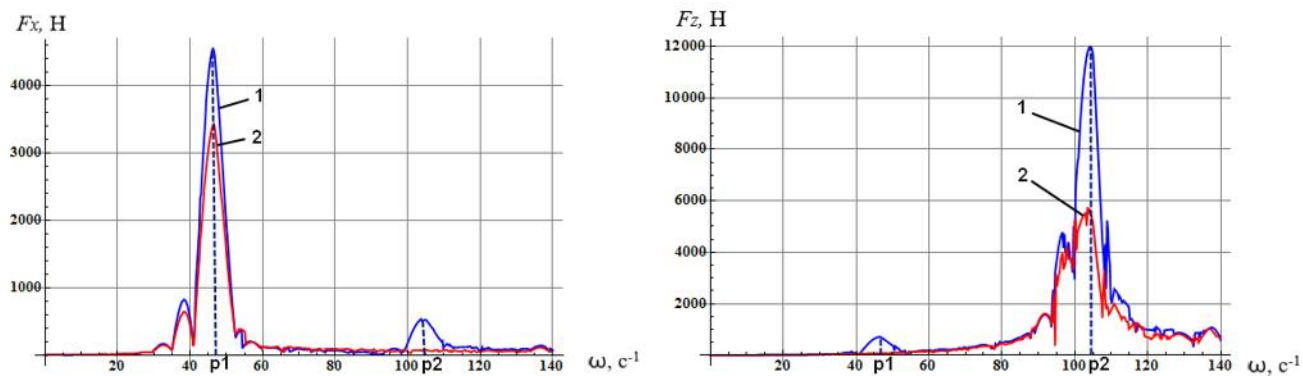


Рисунок 2.14 - Зависимость амплитуды динамических реакций буксового узла по осям  $x$  и  $z$  от угловой скорости колесной пары при коэффициенте вязкого сопротивления  $\beta = 100 \text{ Н}\cdot\text{с}/\text{м}$

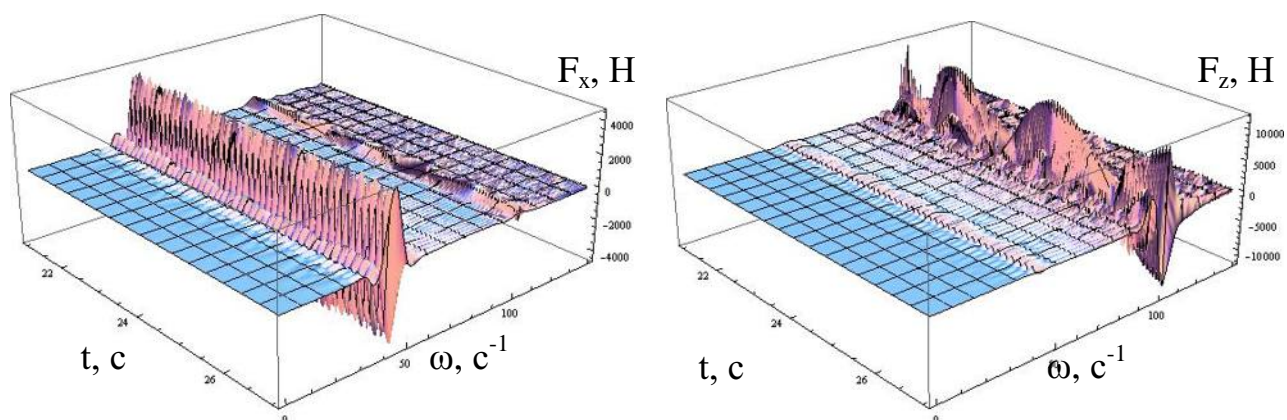


Рисунок 2.15 - Изменение динамических реакций буксового узла по осям  $x$  и  $z$  в поле параметров «время-угловая скорость» при коэффициенте вязкого сопротивления  $\beta = 100 \text{ Н}\cdot\text{с}/\text{м}$  во времени

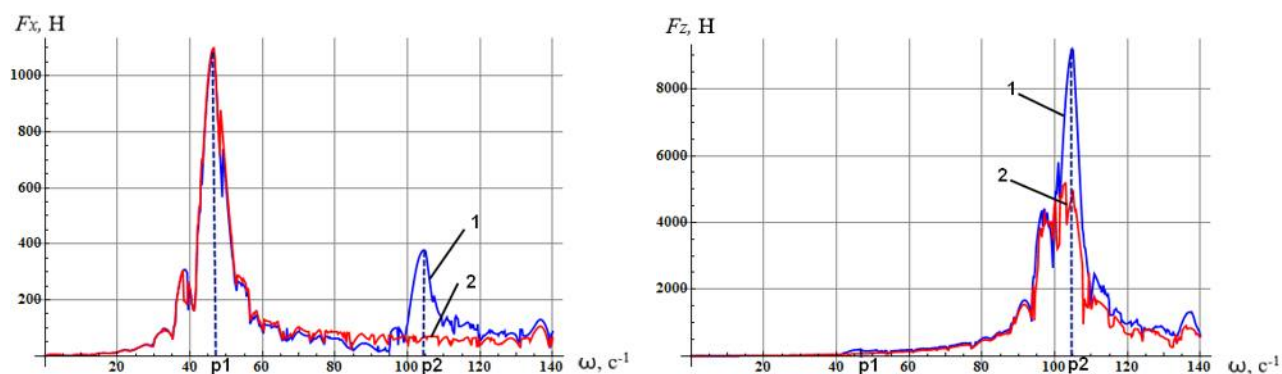


Рисунок 2.16 - Зависимость амплитуды динамических реакций буксового узла по осям  $x$  и  $z$  от угловой скорости колесной пары при коэффициенте вязкого сопротивления  $\beta = 1000 \text{ Н}\cdot\text{с}/\text{м}$

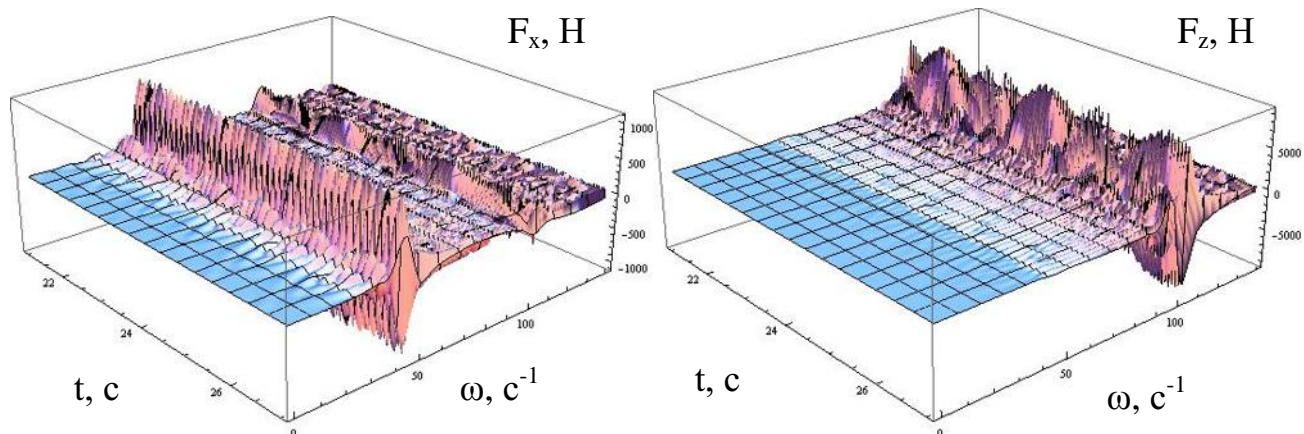


Рисунок 2.17 - Изменение динамических реакций буксового узла по осям  $x$  и  $z$  в поле параметров «время-угловая скорость» при коэффициенте вязкого сопротивления  $\beta = 1000$  Н·с/м во времени

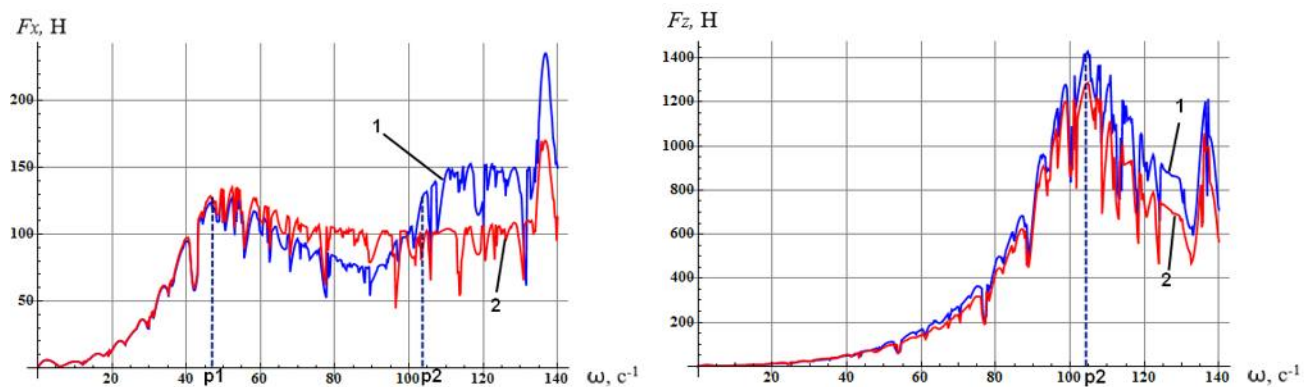


Рисунок 2.18 - Зависимость амплитуды динамических реакций буксового узла по осям  $x$  и  $z$  от угловой скорости колесной пары при коэффициенте вязкого сопротивления  $\beta = 10000$  Н·с/м

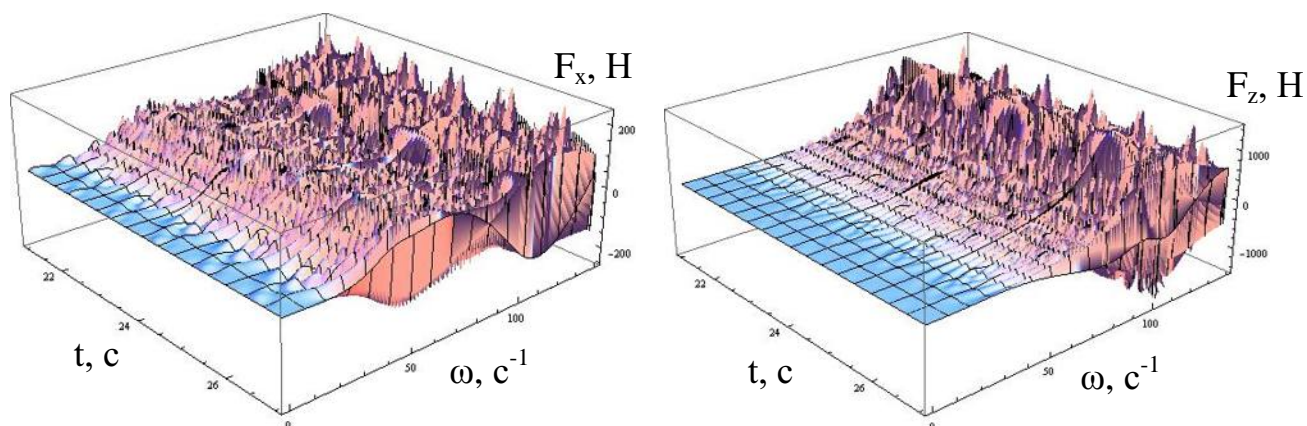


Рисунок 2.19 - Изменение динамических реакций буксового узла по осям  $x$  и  $z$  в поле параметров «время-угловая скорость» при коэффициенте вязкого сопротивления  $\beta = 10000$  Н·с/м во времени

Результаты моделирования для различных значений коэффициента демпфирования в диапазоне [10-10000 Н·с/м] сведены в диаграммы, показанные на рисунке 2.20, где ближние столбцы соответствуют модели, учитывающей гироскопические свойства колёсной пары, а дальние были построены без их учёта.

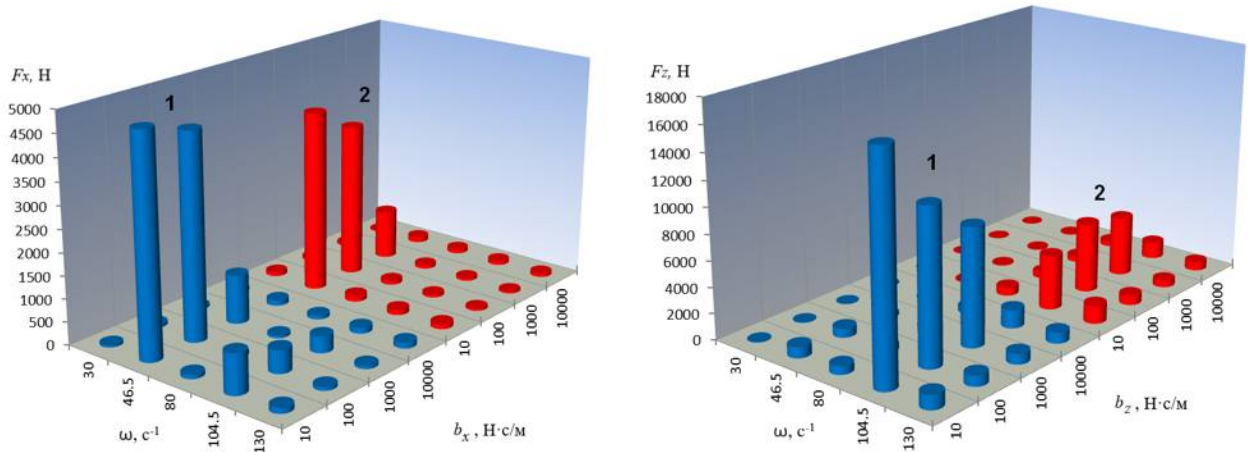


Рисунок 2.20 - Сравнение горизонтальной (слева) и вертикальной (справа) динамической реакции буксового узла по модели 1, учитывающей гироскопические свойства колёсной пары (синие столбцы) и модели 2, без учёта гироскопических свойств (красные столбцы)

Из приведённых графиков и диаграмм следует вывод, что использование упрощенной модели может привести к ошибке в оценке величины действующих на тележку нагрузок от колёсной пары. Использование модели, основанной на уравнениях движения, из которых исключены гироскопические слагаемые, на резонансных режимах дает значение реакции буксового узла существенно ниже получаемого при использовании более общей модели, предлагаемой автором. Это может привести к занижению оценки динамической нагруженности опор качения буксовых узлов. Поэтому при проектировании новых образцов вагонных тележек, в особенности, для реализации скоростного и высокоскоростного движения, следует применять модели, учитывающие гироскопические свойства колесных пар, проявляющиеся при их вращении.

Анализ расчетов, приведённых выше, показывает, что увеличение коэффициента вязкого демпфирования эффективно снижает резонансные явления. Это позволяет выдвинуть практическую рекомендацию при проектировании подвижного состава увеличивать демпфирование буксовых узлов. Это может быть достигнуто путем применения упруго-полимерных материалов, имеющих высокое внутреннее трение.

С целью анализа влияния динамической неуравновешенности колёсной пары на величину динамических реакций буксовых узлов в уравнения движения (2.52) были добавлены члены, учитывающие указанное возмущающее воздействие, а также введено вязкое демпфирование, препятствующее неограниченному росту амплитуды колебаний в резонансных режимах (коэффициенты вязкого сопротивления  $\beta_x$  и  $\beta_z$ ):

$$\begin{cases} m(\ddot{x}_A + \ddot{x}_B) = -2c_x(x_A + x_B) - 2\beta_x(\dot{x}_A + \dot{x}_B), \\ m(\ddot{z}_A + \ddot{z}_B) = -2c_z(z_A + z_B) - 2\beta_z(\dot{z}_A + \dot{z}_B), \\ J_z(\ddot{z}_A - \ddot{z}_B) = -J_y\omega(\dot{x}_A - \dot{x}_B) + 2c_z b^2(z_B - z_A) + \\ \quad + 2\beta_z b^2(\dot{z}_B - \dot{z}_A) + A\omega^2 \sin(\omega t), \\ J_z(\ddot{x}_B - \ddot{x}_A) = -J_y\omega(\dot{z}_A - \dot{z}_B) + 2c_x b^2(x_A - x_B) + \\ \quad + 2\beta_x b^2(\dot{x}_A - \dot{x}_B) + A\omega^2 \cos(\omega t). \end{cases} \quad (2.66)$$

Горизонтальные и вертикальные динамические силы в левом буксовом узле вычислялись согласно уравнениям:

$$\begin{aligned} F_{xA} &= c_x \cdot x_A + \beta_x \cdot \dot{x}_A, \\ F_{zA} &= c_z \cdot z_A + \beta_z \cdot \dot{z}_A. \end{aligned} \quad (2.67)$$

В расчетах были приняты следующие параметры колёсной пары: масса 1400 кг, моменты инерции относительно оси вращения  $J_y = 114 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ , и перпендикулярной ей оси  $J_z = 825 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ , коэффициент приведенной упругости буксовых узлов в горизонтальном и вертикальном направлениях  $c_x = 950 \text{ кН/м}$ ,  $c_z = 4,5 \text{ МН/м}$ , коэффициент вязкого демпфирования  $\beta_x = \beta_z$  – варьируется в диапазоне от 10 до  $10^5 \text{ Н}\cdot\text{с/м}$ , расстояние от центра масс колёсной пары до буксовых узлов  $b = 1,02 \text{ м}$ , динамический дисбаланс принят равным  $A = 20 \text{ кг}\cdot\text{см}$ ,



что согласно п. 4.3.7. ГОСТ 4835-2013 «Колесные пары железнодорожных вагонов. Технические условия», соответствует требованиям, предъявляемым к колесным парам для вагонов конструкционных скоростей от 140 до 160 км/ч.

На рисунке 2.21 приведены зависимости динамических реакций буксового узла в горизонтальном и вертикальном направлении в зависимости от угловой скорости колёсной пары при наличии динамического дисбаланса и коэффициенте демпфирования равным 10 Н·с/м. На приведённом и последующем графиках кривая 1 соответствует модели, учитывающей гироскопические свойства колёсной пары, обусловленные её вращением (использована система уравнений (2.67)), а кривая 2 соответствует для модели, не учитывающей собственное вращение колёсной пары (модель 2, система уравнений (2.68)).

$$\begin{cases} m(\ddot{x}_A + \ddot{x}_B) = -2c_x(x_A + x_B) - 2\beta_x(\dot{x}_A + \dot{x}_B), \\ m(\ddot{z}_A + \ddot{z}_B) = -2c_z(z_A + z_B) - 2\beta_z(\dot{z}_A + \dot{z}_B), \\ J_z(\ddot{z}_A - \ddot{z}_B) = 2c_z b^2(z_B - z_A) + 2\beta_z b^2(\dot{z}_B - \dot{z}_A) + A\omega^2 \sin(\omega t), \\ J_x(\ddot{x}_B - \ddot{x}_A) = 2c_x b^2(x_A - x_B) + 2\beta_x b^2(\dot{x}_A - \dot{x}_B) + A\omega^2 \cos(\omega t). \end{cases} \quad (2.68)$$

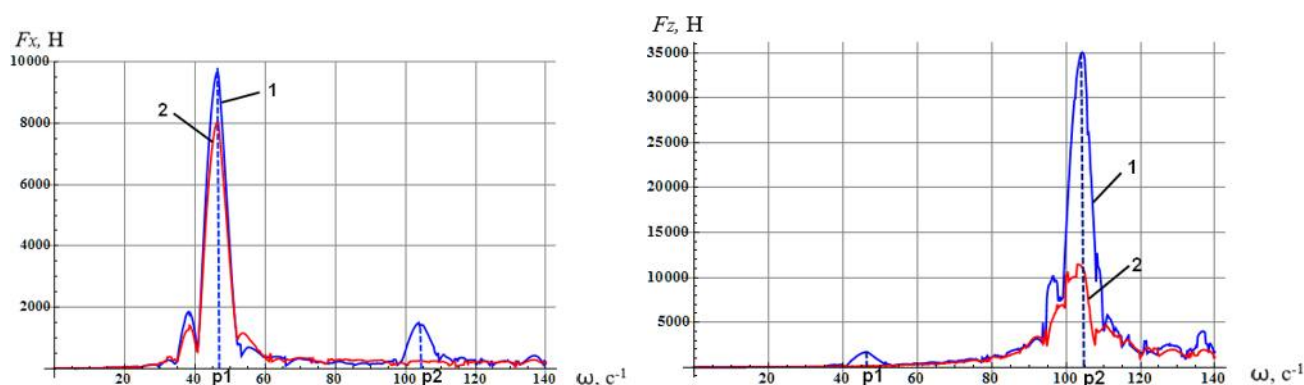


Рисунок 2.21 – Зависимость амплитуды динамических реакций буксового узла по осям  $x$  и  $z$  от угловой скорости колесной пары при коэффициенте вязкого сопротивления  $\beta = 10$  Н·с/м при наличии динамического дисбаланса

Модель, учитывающая возмущающее воздействие, вызванное несоосностью одного из колёс (см. рисунок 2.22 а) описывается уравнениями (2.69).

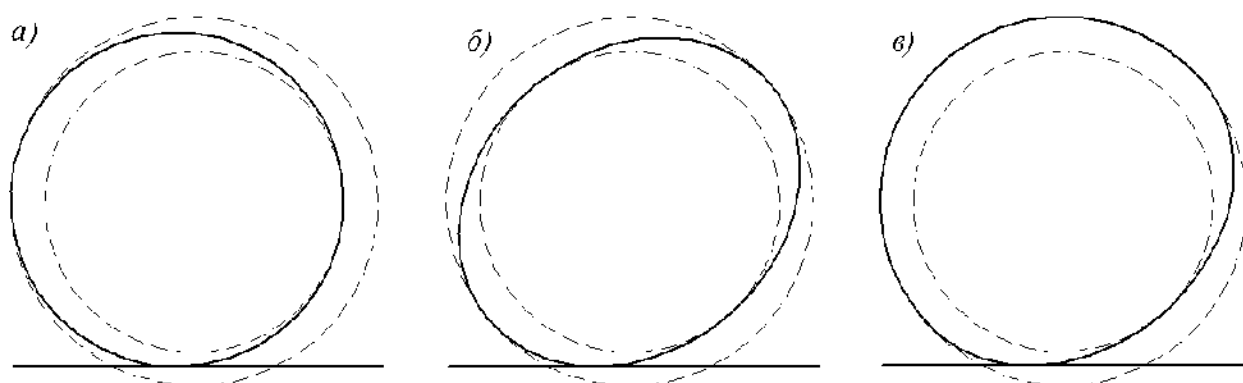


Рисунок 2.22 – Отклонения формы поверхности катания колеса от цилиндрической, вызванные  
а) несоосностью, б) эллиптичностью, в) закатанным ползуном

$$\left\{ \begin{array}{l} m(\ddot{x}_A + \ddot{x}_B) = -2c_x(x_A + x_B) - 2\beta_x(\dot{x}_A + \dot{x}_B), \\ m(\ddot{z}_A + \ddot{z}_B) = -2c_z(z_A + z_B + A\sin(\omega t)) - \\ \quad - 2\beta_z(\dot{z}_A + \dot{z}_B + A\cos(\omega t)) + mA\sin(\omega t), \\ J_z(\ddot{z}_A - \ddot{z}_B) = -J_y\omega(\dot{x}_A - \dot{x}_B) + 2c_z b^2(z_B + A\sin(\omega t) - z_A) + \\ \quad + 2\beta_z b^2(\dot{z}_B - \dot{z}_A + A\omega\cos(\omega t)) + J_z A\sin(\omega t), \\ J_z(\ddot{x}_B - \ddot{x}_A) = -J_y\omega(\dot{z}_A - \dot{z}_B + A\omega\cos(\omega t)) + 2c_x b^2(x_A - x_B) + \\ \quad + 2\beta_x b^2(\dot{x}_A - \dot{x}_B). \end{array} \right. \quad (2.69)$$

Существенным отличием от случая дисбаланса является тот факт, что возмущение воздействует на ротор в вертикальном направлении, изменяясь лишь по величине согласно гармоническому закону с частотой, равной частоте вращения ротора. Результат моделирования представлен на рисунке 2.23. В расчетах была принята величина несоосности колеса  $A = 1$  мм, обуславливающая возмущающее воздействие, что согласно п. 4.3.4. ГОСТ 4835-2013 «Колесные пары железнодорожных вагонов. Технические условия.» соответствует предельным нормам для выпускаемых из производства и ремонта колесных пар для вагонов конструктивных скоростей до 160 км/ч.. Расчет динамической реакции производился согласно уравнениям (2.67). Как видно из графика (рисунок 2.23), динамическая реакция по оси  $x$  присутствует только в модели №1.

Модель №2 не способна возбудить резонансные колебания в плоскости, перпендикулярной плоскости действия возмущающей силы в виду отсутствия гироскопических членов в уравнениях движения.

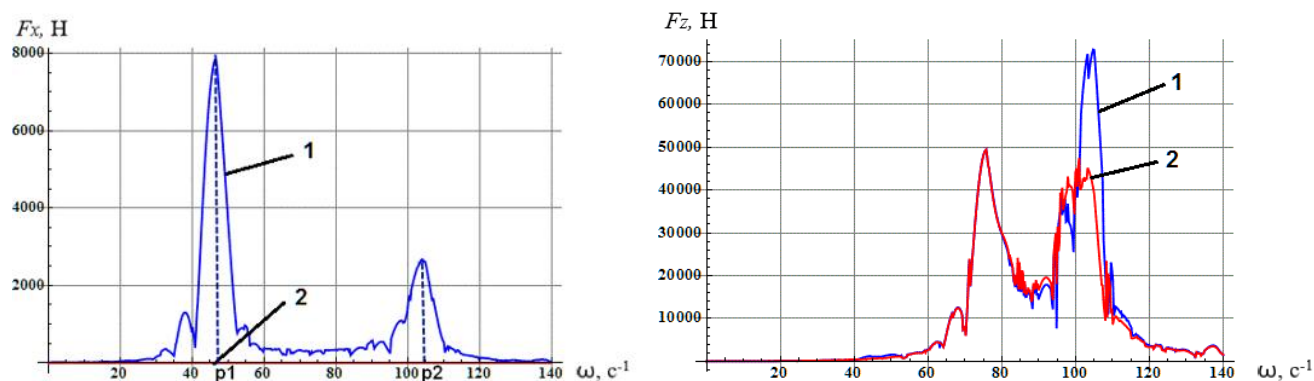


Рисунок 2.23 – Зависимость амплитуды динамических реакций буксового узла по осям  $x$  и  $z$  от угловой скорости колесной пары при коэффициенте вязкого сопротивления  $\beta = 10 \text{ Н} \cdot \text{с}/\text{м}$  при несоосности колеса

Модель, учитывающая возмущение, обусловленное эллиптичностью колеса, представлена уравнениями (2.70).

$$\begin{cases} m(\ddot{x}_A + \ddot{x}_B) = -2c_x(x_A + x_B) - 2\beta_x(\dot{x}_A + \dot{x}_B), \\ m(\ddot{z}_A + \ddot{z}_B) = -2c_z(z_A + z_B + A\sin(2\omega t)) - 2\beta_z(\dot{z}_A + \dot{z}_B + 2A\cos(2\omega t)) + \\ \quad + 4mA\sin(2\omega t), \\ J_z(\ddot{z}_A - \ddot{z}_B) = -J_y\omega(\dot{x}_A - \dot{x}_B) + 2c_z b^2(z_B + A\sin(2\omega t) - z_A) + \\ \quad + 2\beta_z b^2(\dot{z}_B - \dot{z}_A + 2A\omega\cos(2\omega t)) + 4J_z A\sin(2\omega t), \\ J_z(\ddot{x}_B - \ddot{x}_A) = -J_y\omega(\dot{z}_A - \dot{z}_B + 2A\omega\cos(2\omega t)) + 2c_x b^2(x_A - x_B) + \\ \quad + 2\beta_x b^2(\dot{x}_A - \dot{x}_B). \end{cases} \quad (2.70)$$

В этом случае за один оборот колеса следует два периода возмущающего воздействия (см. рисунок 2.22 б). Как и в случае несоосности, возмущающая сила, вызванная амплитудой эллиптичности  $A = 1 \text{ мм}$ , воздействует в вертикальной плоскости. Результаты моделирования приведены на рисунке 2.24. Следует отметить практически кратное двум уменьшение частоты вращения, вызывающее

резонансные явления. Расчетная частота резонанса согласно частотному уравнению (2.64) составила 23 Гц и 53 Гц соответственно.

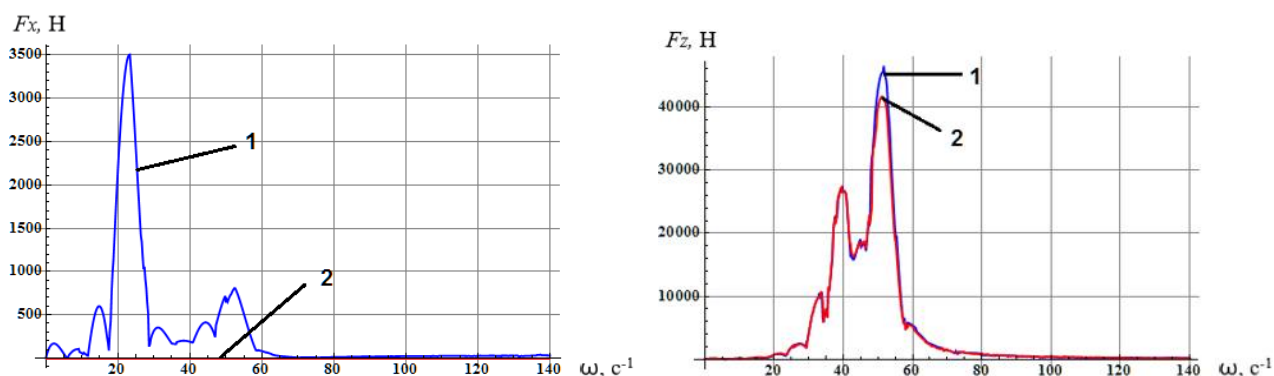


Рисунок 2.24 – Зависимость амплитуды динамических реакций буксового узла по осям  $x$  и  $z$  от угловой скорости колесной пары при коэффициенте вязкого сопротивления  $\beta = 10 \text{ Н} \cdot \text{с}/\text{м}$  при эллиптичности колеса

Для проверки адекватности построенной математической модели в программном комплексе «Универсальный механизм» была разработана модель колесной пары в виде ротора, буксовые узлы которого связаны с основанием через упруго-демпфирующие связи (рисунок 2.25).

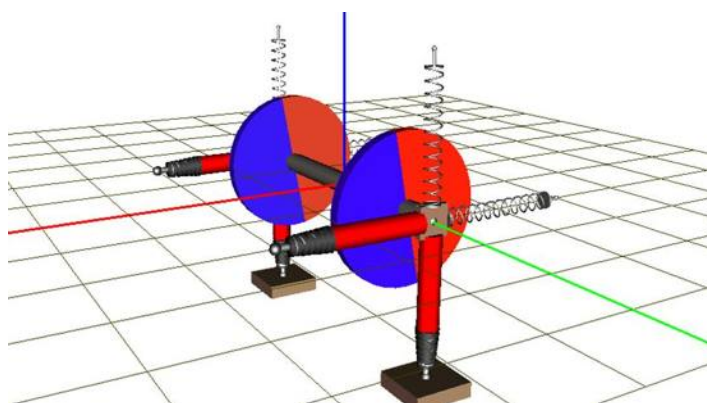


Рисунок 2.25 – Модель ротора в неравноупругих опорах с вязким демпфированием, реализованная в программе «Универсальный механизм»



Ротор наделен массово-инерционными параметрами, и характеристиками упругих связей, аналогичными принятым в численном эксперименте. В процессе вращения ротора были получены графики изменения динамических реакций буксовых шарниров по двум осям координат (рисунок 2.26). Имитационное моделирование подтвердило возникновение на расчётных критических частотах резонансных колебаний, вызванных рассмотренными возмущениями [67], а также соответствие величины динамических добавок к буксовым реакциям расчётным данным.

Как показал анализ численных расчётов, исключение из уравнений гироскопических слагаемых ведёт к существенному занижению расчётной реакции в буксах колёсных пар и может сказаться на точности прочностных расчётов ходовых частей подвижного состава. Этот факт усугубляется тем, что указанная нагрузка является знакопеременной, что повышает вероятность усталостных повреждений деталей.

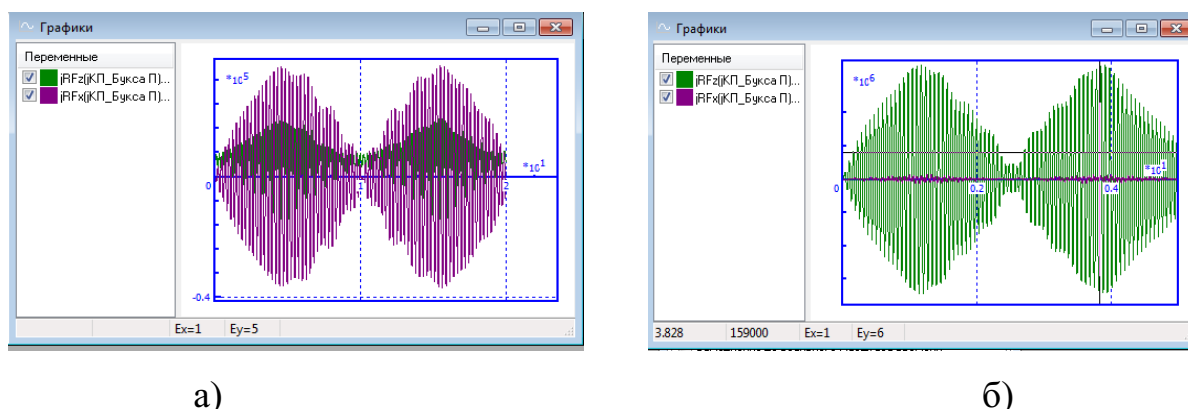


Рисунок 2.26 – Динамические реакции на первой критической частоте (а) и второй критической частоте (б), полученные по результатам моделирования в среде «Универсальный механизм»

В 2013 году по заказу ОПЖТ были проведены исследования реальных действующих усилий на боковые рамы тележки [149] (рис. 2.27). Анализ результатов испытаний показал существенное завышение реальных действующих сил по сравнению с расчетными, определяемыми на основе Норм для расчёта и проектирования вагонов железных дорог МПС колеи 1520 мм (несамоходных).

Как видно из рисунка, основное завышение относится к рамным силам. Исходя из проведенных выше исследований, можно предположить, что причиной подобных повышенных воздействий может служить, в том числе, и гироскопические силы, особо проявляющиеся в резонансных режимах, находящихся в зоне эксплуатационных скоростей.

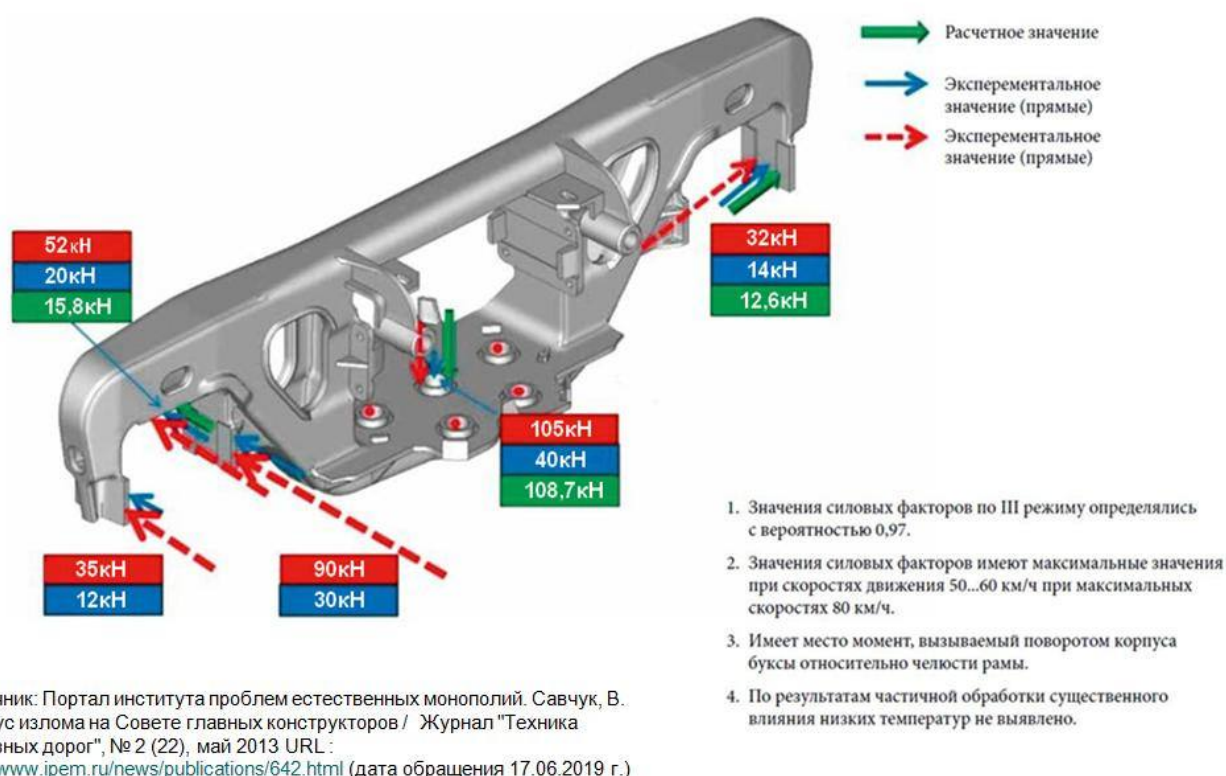


Рисунок 2.27 – Результаты анализа опытных поездок по оценке нагруженности боковых рам тележки 18-100. Источник: ЗАО «Испытательный центр технических средств железнодорожного транспорта» [149]

Таким образом, можно сделать вывод, что при разработке имитационных математических моделей высокоскоростных железнодорожных экипажей необходимо учитывать множество различных факторов, одним из которых является гироскопический эффект от вращающихся колёсных пар, проявляющийся при повышенных скоростях движения. Исходя из сказанного, комплексная модель динамики трёхэлементной тележки грузового вагона, разработке и исследованию которой посвящены следующие главы, была построена с учетом гироскопических эффектов от вращающихся колёсных пар.

### **3 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ТЕЛЕЖКИ ГРУЗОВОГО ВАГОНА**

В главе 2 был рассмотрен вопрос движения одиночной колесной пары с упругими буксовыми связями по рельсовому пути. В реальном подвижном составе такая постановка задачи соответствует экипажам с бестележечной схемой ходовых частей и одноступенчатом подвешивании. В большинстве современных рельсовых экипажей применяется схема с объединением колесных пар в тележку, на которую опирается один или два вагона. В то время как пассажирский высокоскоростной состав в нашей стране представлен в основном моделями заграничной разработки, видимо по причине большего опыта проектирования и эксплуатации подобной техники у заграничных производителей, тележки для грузового подвижного состава разрабатываются и производятся на отечественных предприятиях. Эти разработки опираются на исследования в области динамики вагонов, проводимые преимущественно в нашей стране учеными крупных научных школ, сформировавшихся в ряде вузов и научно-производственных организаций. Исследования, приведенные в этой главе, также посвящены теме моделирования тележки грузового вагона. За основу взята трехэлементная тележка 18-100, имеющая в настоящее время наибольшее распространение в грузовом парке вагонов, функционирующих в сети российских железных дорог. Следует отметить, что новые тележки, выпускаемые для вагонов новой постройки, имеют сходную с упомянутой тележкой структурную схему, являясь, по сути, глубокой модернизацией тележки 18-100. Следовательно, для моделирования данных тележек применима обобщенная математическая модель, отличающаяся лишь исходными параметрами жесткости и демпфирования узлов связей. Ниже по ходу главы будет рассмотрен принцип построения указанной математической модели, приведены результаты расчетов и обсуждение полученных результатов. В качестве сравнения адекватности разработанной

модели с натурными образцами приведены экспериментальные данные и результаты численного моделирования.

### **3.1 Общее описание модели и методика её синтеза**

Для создания адекватной математической модели динамики тележки в первую очередь необходимо представить моделируемый объект в виде заменяющей его структурной схемы. Для выбранной нами тележки 18-100 предлагается структурная схема, изображенная на рисунке 3.1.

Главная особенность предлагаемой расчетной схемы заключается в том, что тела, составляющие конструкцию тележки, не связаны жесткими связями и за счет упругих деформаций введенных в схему элементов, моделирующих изгибную и контактную жесткость тел, могут изменять относительные положения. Поэтому с каждым телом связана локальная система координат.

Условия движения тележки моделируются заданием расположения локальных неровностей рельсовой нити в вертикальной, продольной и горизонтальной плоскостях (в профиле и плане), как функции пройденного пути.

Результатирующее движение каждого элемента конструкции представляет собой сумму нескольких простых движений. Чтобы создать правильное математическое описание модели, необходимо задаться наиболее удобными системами координат. Обычно начало системы координат связывают с центром масс тела или системы, однако это не всегда удобно. В нашем случае, когда предполагается изучать влияние конструктивных отклонений параметров тележки, в том числе и смещения центра масс тела от оси вращения, удобнее каждому телу задать свою собственную локальную систему координат, подвижную относительно некоторого центра системы тел со связанной с ним системой координат. Тогда все поступательные движения тел будут являться поступательными движениями локальных связанных координатных систем относительно этого центра, а вращательные движения будут задаваться углами

поворота осей связанных координатных систем относительно неподвижных осей центральной системы координат, задаваемых в форме самолетных углов.

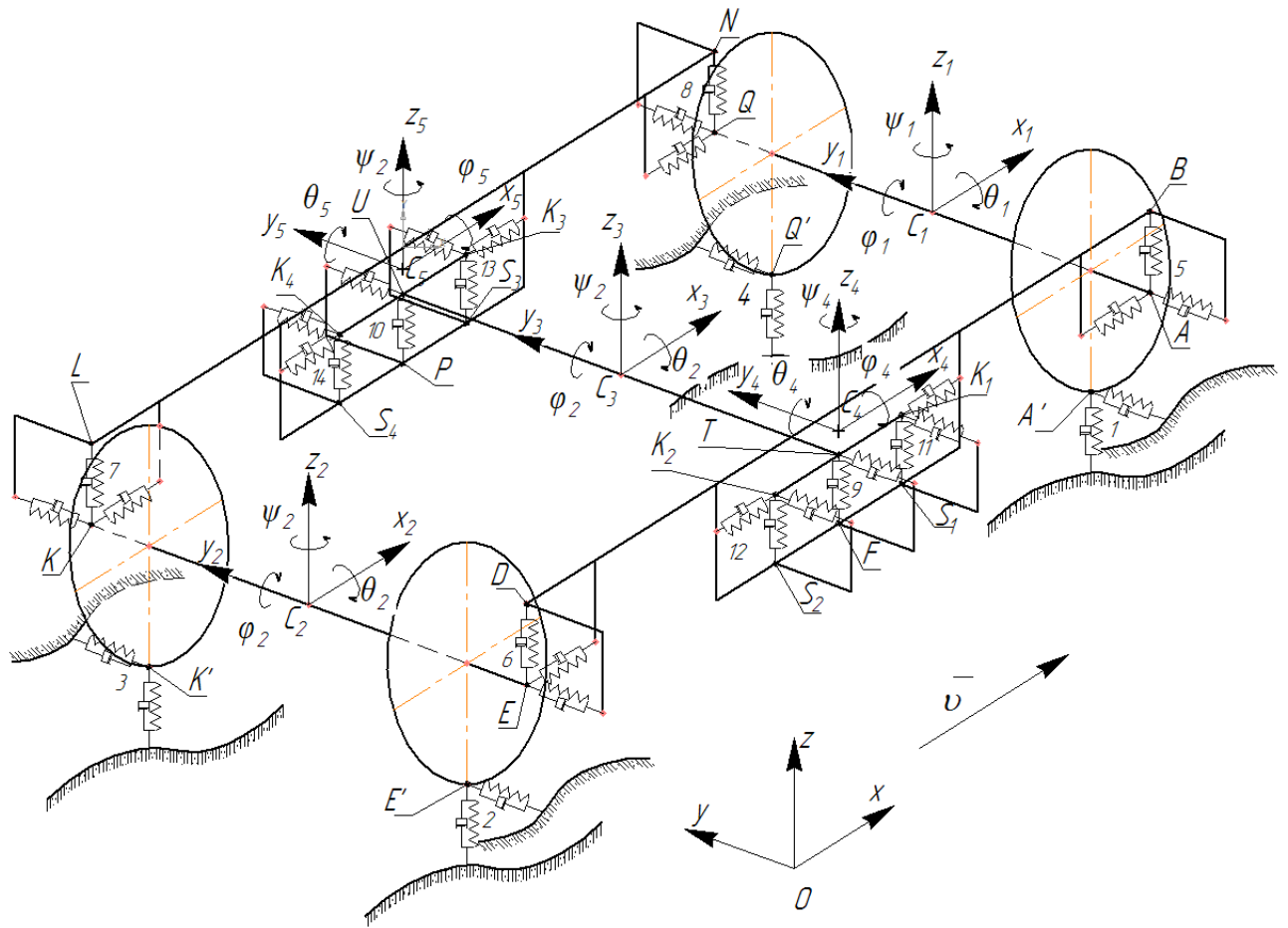


Рисунок 3.1 – Расчетная схема тележки 18-100

В динамике подвижного состава приняты следующие названия перемещений:

перемещения вдоль продольной оси – *подёргивания*;

перемещения вдоль поперечной горизонтальной оси – *относ*;

перемещения вдоль вертикальной оси – *подпрыгивание*.

Угловые повороты принято задавать в форме самолётных (корабельных) углов (разновидность углов Крылова – Эйлера). Их названия несколько отличаются от принятых в судостроении авиации:

поворот относительно продольной оси – *боковая качка* (аналог крена);

поворот относительно поперечной горизонтальной оси – *галопирование* (аналог тангажа или дифферента);

поворот относительно вертикальной оси – *виляние* (аналог рыскания).

Условимся, что все используемые нами системы координат будут правыми. Для неподвижной системы координат положительное направление оси  $Ox$  совпадает с направлением движения, поперечная ось  $Oy$  направлена влево по ходу движения, а ось  $Oz$  направлена вверх. Для подвижных (относительных) систем координат ось  $O\xi$  направлена вдоль движения в его направлении, ось  $O\eta$  направлена влево по ходу тележки, а ось  $O\zeta$  направлена вверх. Тогда положительным направлением углов поворота осей подвижных систем координат относительно неподвижной будет направление поворота против хода часовой стрелки при взгляде с положительного конца оси. Так как существует несколько способов задания угловых координат, то для каждого тела можно применить наиболее выгодную систему углов со своими соотношениями направляющих косинусов девяти углов, для которых все углы по возможности будут малыми (кроме углов собственного вращения). Кроме того, при таком способе задания координатных систем можно определить фактическое положение центра масс тела в локальной системе. Тогда этот центр масс будет совершать сферическое движение относительно начала системы координат, связанной с телом и поступательное движение вместе с центром этой локальной системой. В этом случае кинетическая энергия тела будет состоять из трех составляющих: кинетической энергии поступательного движения тела, определяемой скоростью поступательного движения центра локальной системы, кинетической энергии вращательного движения тела, определяемой скоростью вращения тела относительно осей локальной системы координат и пропорциональной моментам инерции тела, также определенным относительно осей этой системы координат, и кинетической энергии центра масс, движущегося относительно начала локальной системы координат. При задании поступательного движения тележки и, соответственно, её элементов вдоль рельсового пути, используем вариант переносного движения, когда подвижная система координат связана с тележкой. Таким образом, тележка будет совершать только колебательные движения

относительно подвижной системы координат, вызванные возмущениями со стороны движущегося под ней пути.

Обобщенными координатами, согласно выбранной расчетной схемы, являются следующие 30 переменных:  $x_1, y_1, z_1, \varphi_1, \psi_1, \theta_1, x_2, y_2, z_2, \varphi_2, \psi_2, \theta_2, x_3, y_3, z_3, \varphi_3, \psi_3, \theta_3, x_4, y_4, z_4, \varphi_4, \psi_4, \theta_4, x_5, y_5, z_5, \varphi_5, \psi_5, \theta_5$ , представляющих собой степени свободы всех пяти элементов «трехэлементной» тележки грузового вагона, где  $x_i, y_i, z_i$  – координаты начала подвижных систем координат  $i$ -го элемента,  $\varphi_i, \psi_i, \theta_i$  – соответственно, углы поворота в форме углов Эйлера-Крылова.

### 3.2 Выбор подвижных систем координат

Как отмечалось ранее, тележка мод. 18-100 состоит из пяти основных тел: двух колесных пар, надрессорной балки и двух боковин. Первые три элемента условно перпендикулярны направлению движения, а обе боковины параллельны ему. Применим две различных последовательности задания углов поворота: одна для перпендикулярных элементов, другая – для параллельных.

Для колесных пар и надрессорной балки углы поворота осей будем задавать следующим образом (рис. 3.2):

- осуществляем поворот на положительный угол  $\psi$  относительно оси  $\zeta$ , изначально сонаправленной с вертикальной осью  $z$ ;

- осуществляем поворот на положительный угол  $\theta$  относительно оси  $\xi$ , изначально сонаправленной с неподвижной осью  $x$ , а к моменту поворота угол между осями  $\xi$  и  $x$  равен  $\psi$ ;

- осуществляем поворот тела вокруг оси  $\eta$ , являющейся продольной осью тела и изначально совпадающей с осью  $y$ , на угол собственного вращения  $\varphi$ .

Запишем соотношения направляющих косинусов между подвижными и неподвижными осями для данного способа задания углов поворота осей координат:

$$\cos(\xi^{\wedge}x) = \cos\psi \cdot \cos\theta - \sin\psi \cdot \sin\varphi \cdot \sin\theta$$

$$\cos(\xi^{\wedge}y) = \sin\psi \cdot \cos\varphi + \cos\psi \cdot \sin\varphi \cdot \sin\theta$$

$$\begin{aligned}
 \cos(\xi^z) &= -\sin\varphi \cdot \cos\theta \\
 \cos(\eta^x) &= -\sin\psi \cdot \cos\theta \\
 \cos(\eta^y) &= \cos\psi \cdot \cos\theta \\
 \cos(\eta^z) &= \sin\theta \\
 \cos(\zeta^x) &= \cos\psi \cdot \sin\varphi + \sin\psi \cdot \cos\varphi \cdot \sin\theta \\
 \cos(\zeta^y) &= \sin\psi \cdot \sin\varphi - \cos\psi \cdot \cos\varphi \cdot \sin\theta \\
 \cos(\zeta^z) &= \cos\varphi \cdot \cos\theta
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

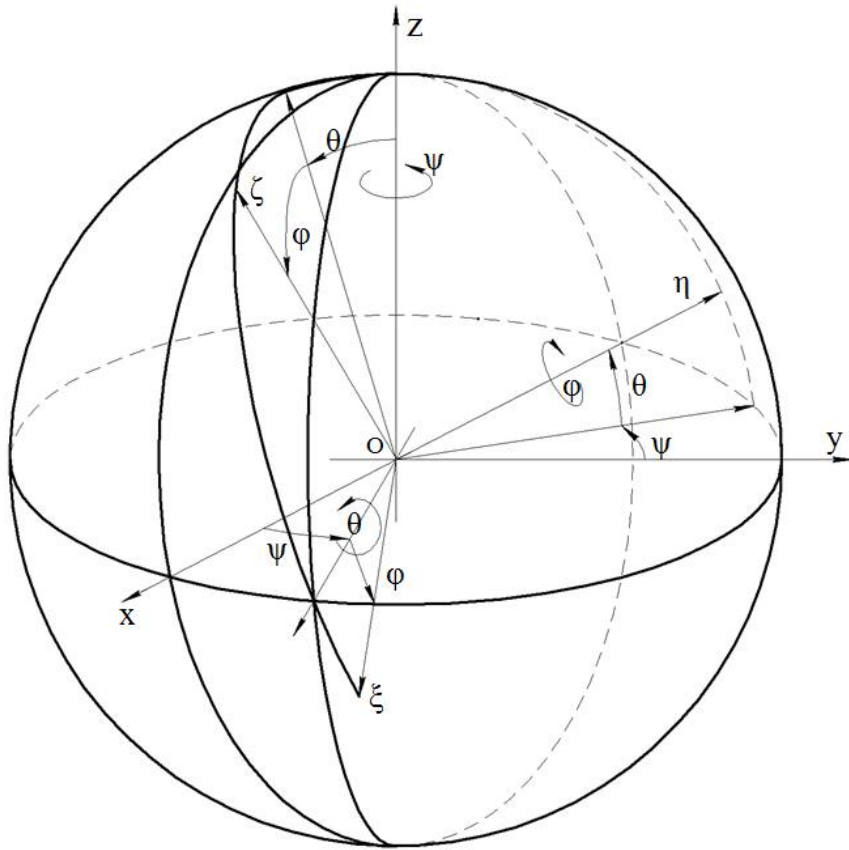


Рисунок 3.2 – Задание последовательности углов поворота для первой группы тел

Указанные соотношения (3.1) можно получить через матрицы поворотов:

$$\Theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad \Psi = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда матрица направляющих косинусов будет иметь вид:

$$\mathbf{A} = \Psi \cdot \Theta \cdot \Phi$$



Для боковых рам тележки удобнее воспользоваться иной последовательностью задания углов поворота тела. Это связано с тем, что в данном случае продольной осью тела является подвижная ось  $\xi$ . Тогда последовательность поворотов будет следующей (рис. 3.3):

- поворот на угол  $\psi$  вокруг оси  $\zeta$ , изначально совпадающей с осью  $z$ ;
- поворот на угол  $\theta$  вокруг текущего положения оси  $\eta$ , имевшей начальное направление, совпадавшее с осью  $y$ ;
- поворот на угол собственного вращения  $\varphi$  вокруг текущего положения подвижной оси  $\xi$ , являющейся продольной осью тела и имевшей начальное направление, совпадавшее с осью  $x$ .

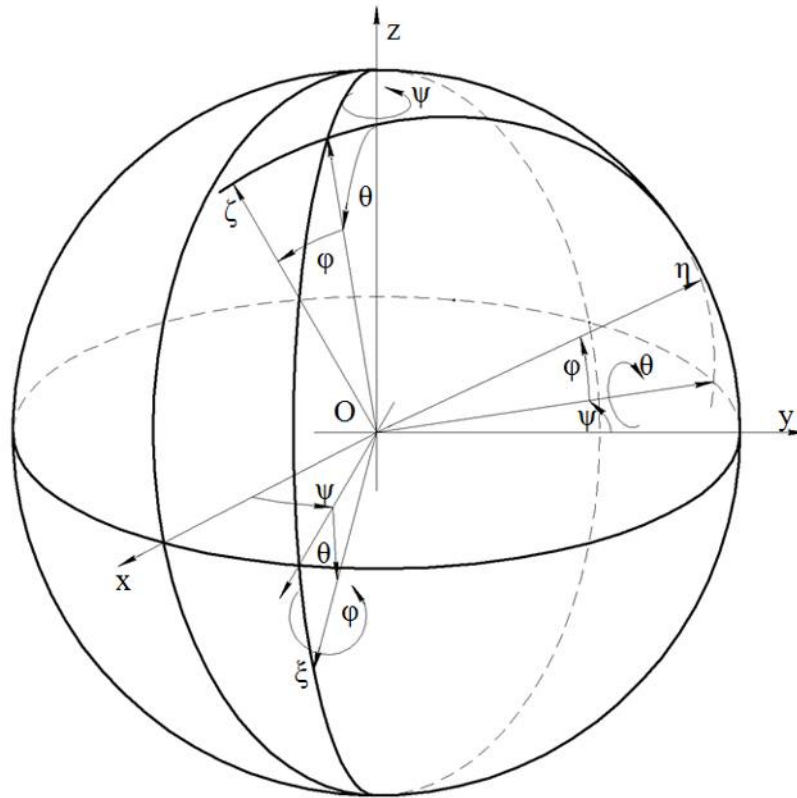


Рисунок 3.3 – Задание последовательности углов поворота вторым способом

Запишем соотношения девяти направляющих косинусов для этого случая:

$$\cos(\xi^x) = \cos\psi \cdot \cos\theta$$

$$\cos(\xi^y) = \sin\psi \cdot \cos\theta$$

$$\cos(\xi^z) = -\sin\theta$$

$$\cos(\eta^x) = -\sin\psi \cdot \cos\varphi + \cos\psi \cdot \cos\varphi \cdot \sin\theta$$

$$\cos(\eta^y) = \cos\psi \cdot \cos\varphi + \sin\psi \cdot \sin\varphi \cdot \sin\theta \quad (3.2)$$

$$\cos(\eta^z) = \sin\varphi \cdot \cos\theta$$

$$\cos(\zeta^x) = \sin\psi \cdot \sin\varphi + \cos\psi \cdot \cos\varphi \cdot \sin\theta$$

$$\cos(\zeta^y) = -\cos\psi \cdot \sin\varphi + \sin\psi \cdot \cos\varphi \cdot \sin\theta$$

$$\cos(\zeta^z) = \cos\theta \cdot \cos\varphi$$

То же самое может быть выражено через матрицы поворотов:

$$\Theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos & -\sin \\ 0 & \sin & \cos \end{bmatrix}, \quad \Psi = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда матрица направляющих косинусов будет иметь прежний вид:

$$\mathbf{A} = \Psi \cdot \Theta \cdot \Phi$$

Приведённые соотношения направляющих косинусов (3.1) и (3.2) понадобятся для дальнейших преобразований, например, для определения линейного перемещения любой точки тела, имеющей тройку координат в подвижной системе отсчета  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  относительно неподвижной системы координат  $Oxyz$ .

### 3.3 Вывод полной кинетической энергии тележки

Система уравнений Лагранжа II рода, описывающая динамику моделируемой механической системы имеет общий вид:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\delta A}{\delta q_i} - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}.$$

В случае 5 тел, имеющих по 6 степеней свободы, система будет состоять из 30 дифференциальных уравнений второго порядка.

Кинетическую энергию системы находим как сумму кинетических энергий тел, её составляющих. Кинетическая энергия любого тела в выбранной нами системе координат состоит из двух составляющих:

- кинетическая энергия поступательного движения тела относительно неподвижной системы координат:

$$T_{1,i} = m_i \frac{v^2}{2} = \frac{m_i}{2} (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2); \quad (3.3)$$

- кинетическая энергия вращательного движения тела относительно подвижных (связанных с телом) осей координат:

$$T_{2,i} = I_{i,\xi} \frac{\omega_{i,\xi}^2}{2} + I_{i,\eta} \frac{\omega_{i,\eta}^2}{2} + I_{i,\zeta} \frac{\omega_{i,\zeta}^2}{2}, \quad (3.4)$$

где  $\omega_{i,\xi}$ ,  $\omega_{i,\eta}$ ,  $\omega_{i,\zeta}$  – проекции угловых скоростей на оси подвижной системы координат.

Моменты инерции с учетом поправок согласно теореме Гюйгенса-Штейнера, обусловленных смещением осей вращения, равны:

$$I_{i,\xi} = I_{i,x} + m_i (\eta_{ci}^2 + \zeta_{ci}^2), \quad I_{i,\eta} = I_{i,y} + m_i (\xi_{ci}^2 + \zeta_{ci}^2), \quad I_{i,\zeta} = I_{i,z} + m_i (\xi_{ci}^2 + \eta_{ci}^2) \quad (3.5)$$

где  $I_{i,\{x,y,z\}}$  – моменты инерции тела относительно осей, проходящих через центр масс тела (главные центральные моменты инерции),  $\xi_{ci}$ ,  $\eta_{ci}$ ,  $\zeta_{ci}$  – координаты центра масс тела в подвижной системе отсчета, вызванные погрешностями при изготовлении элементов конструкции или их общей несимметричностью.

Значения инерционно-массовых характеристик модели приведены в таблице 4.1 главы 4.

Таким образом, для вычисления полной кинетической энергии необходимо знать проекции угловых скоростей тела на оси подвижной системы координат  $\xi_i$ ,  $\eta_i$ ,  $\zeta_i$ . В противном случае, при проецировании угловых скоростей на неподвижные оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , потребовалось бы вычислять значение момента инерции тела также относительно осей неподвижной системы координат как функцию от углов поворота  $\psi_i$ ,  $\theta_i$ ,  $\phi_i$ , что было бы значительно сложнее. Указанные проекции угловой скорости можно получить через первые производные от поворотных углов. Так как способы задания углов поворота разные для продольных и поперечных элементов конструкции, то запишем уравнения проекций угловой скорости для обоих случаев:

- для передней и задней колесных пар и надрессорной балки:

$$\begin{aligned}
\omega_{\xi} &= \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \cos(\xi \wedge z) = \dot{\theta} \cos \varphi - \dot{\psi} \sin \varphi \cos \theta \\
\omega_{\eta} &= \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos(\eta \wedge z) = \dot{\phi} + \dot{\psi} \sin \theta \\
\omega_{\zeta} &= \dot{\psi} \cos(\zeta \wedge z) + \dot{\theta} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \dot{\psi} \cos \varphi \cos \theta + \dot{\theta} \sin \varphi,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

- для левой и правой боковин:

$$\begin{aligned}
\omega_{\xi} &= \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos(\xi \wedge z) = \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta \\
\omega_{\eta} &= \dot{\theta} \cos(\varphi) + \dot{\psi} \cos(\eta \wedge z) = \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \varphi \cos \theta \\
\omega_{\zeta} &= \dot{\psi} \cos(\zeta \wedge z) + \dot{\theta} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = \dot{\psi} \cos \varphi \cos \theta - \dot{\theta} \sin \varphi.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Суммируя выражения (3.3), (3.4) и (3.5) с учетом (3.6) и (3.7), получаем выражение полной кинетической энергии системы:

$$\begin{aligned}
T &= \sum_{i=1}^3 \left( \frac{m_i}{2} (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) + \left( \frac{m_i}{2} (\eta_{ci}^2 + \zeta_{ci}^2) + \frac{I_{i\xi}}{2} \right) (\dot{\theta}_i^2 \cos^2 \varphi_i - 2\dot{\theta}_i \dot{\psi}_i \cos \varphi_i \sin \varphi_i \cos \theta_i + \right. \\
&\quad \left. + \dot{\psi}_i^2 \sin^2 \varphi_i \cos^2 \theta_i) + \left( \frac{m_i}{2} (\xi_{ci}^2 + \zeta_{ci}^2) + \frac{I_{i\eta}}{2} \right) (\dot{\phi}_i^2 + 2\dot{\phi}_i \dot{\psi}_i \sin \theta_i + \dot{\psi}_i^2 \sin^2 \theta_i) + \right. \\
&\quad \left. \left( \frac{m_i}{2} (\xi_{ci}^2 + \eta_{ci}^2) + \frac{I_{i\zeta}}{2} \right) (\dot{\psi}_i^2 \cos^2 \varphi_i \cos^2 \theta_i + 2\dot{\psi}_i \dot{\theta}_i \cos \varphi_i \sin \varphi_i \cos \theta_i + \dot{\theta}_i^2 \sin^2 \varphi_i) \right) + \\
&\quad + \sum_{i=4}^5 \left( \frac{m_i}{2} (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) + \left( \frac{m_i}{2} (\eta_{ci}^2 + \zeta_{ci}^2) + \frac{I_{i\xi}}{2} \right) (\dot{\phi}_i^2 - 2\dot{\phi}_i \dot{\psi}_i \sin \theta_i + \dot{\psi}_i^2 \sin^2 \theta_i) + \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{m_i}{2} (\xi_{ci}^2 + \zeta_{ci}^2) + \frac{I_{i\eta}}{2} \right) (\dot{\theta}_i^2 \cos^2 \varphi_i + 2\dot{\psi}_i \dot{\theta}_i \cos \varphi_i \sin \varphi_i \cos \theta_i + \dot{\psi}_i^2 \sin^2 \varphi_i \cos^2 \theta_i) + \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{m_i}{2} (\xi_{ci}^2 + \eta_{ci}^2) + \frac{I_{i\zeta}}{2} \right) (\dot{\psi}_i^2 \cos^2 \varphi_i \cos^2 \theta_i - 2\dot{\psi}_i \dot{\theta}_i \cos \varphi_i \sin \varphi_i \cos \theta_i + \dot{\theta}_i^2 \sin^2 \varphi_i) \right)
\end{aligned}$$

Для составления дифференциальных уравнений Лагранжа II рода необходимо найти следующие производные от суммарной кинетической энергии системы по 30-ти обобщенным координатам.

Производные от кинетической энергии для колесных пар и надрессорной балки (приведены только для первой по ходу движения колесной пары, для второй колесной пары и надрессорной балки вычисления аналогичные).

Зависимость кинетической энергии от координаты проявляется только для угла поворота  $\theta$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial \theta_1} &= \left( \frac{m_1}{2} (\zeta_{c1}^2 + \eta_{c1}^2) + \frac{I_{\xi 1}}{2} \right) (2\dot{\psi}_1^2 \sin^2 \varphi_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1 + \\
&\quad + 2\dot{\psi}_1 \dot{\theta}_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \sin \theta_1) + \\
&+ \left( \frac{m_1}{2} (\xi_{c1}^2 + \zeta_{c1}^2) + \frac{I_{\eta 1}}{2} \right) (2\dot{\psi}_1^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 + 2\dot{\phi}_1 \dot{\psi}_1 \cos \theta_1) + \\
&+ \left( \frac{m_1}{2} (\xi_{c1}^2 + \eta_{c1}^2) + \frac{I_{\zeta 1}}{2} \right) (2\dot{\psi}_1^2 \cos^2 \varphi_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1 - 2\dot{\psi}_1 \dot{\theta}_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \sin \theta_1) \\
&\quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) = m_1 \ddot{x}_1 \\
&\quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_1} \right) = m_1 \ddot{y}_1 \\
&\quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_1} \right) = m_1 \ddot{z}_1 \\
&\quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_1} \right) = \left( \frac{m_1}{2} (\zeta_{c1}^2 + \eta_{c1}^2) + \frac{I_{\xi 1}}{2} \right) (2\dot{\psi}_1 \sin^2 \varphi_1 \cos^2 \theta_1 - \\
&\quad - 2\ddot{\theta}_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1 + 4\dot{\phi}_1 \dot{\psi}_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \cos^2 \theta_1 - \\
&\quad - 4\dot{\psi}_1 \dot{\theta}_1 \sin^2 \varphi_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1 + 2\dot{\phi}_1 \dot{\theta}_1 \sin^2 \varphi_1 \cos \theta_1 - \\
&\quad - 2\dot{\phi}_1 \dot{\theta}_1 \cos^2 \varphi_1 \cos \theta_1 + 2\dot{\theta}_1^2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \sin \theta_1) + \\
&\quad + \left( \frac{m_1}{2} (\xi_{c1}^2 + \zeta_{c1}^2) + \frac{I_{\eta 1}}{2} \right) (2\dot{\phi}_1 \sin \theta_1 + 2\dot{\psi}_1 \sin^2 \theta_1 + 2\dot{\phi}_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + \\
&\quad + 4\dot{\psi}_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1) + \\
&\quad + \left( \frac{m_1}{2} (\xi_{c1}^2 + \eta_{c1}^2) + \frac{I_{\zeta 1}}{2} \right) (2\dot{\psi}_1 \cos^2 \varphi_1 \cos^2 \theta_1 + 2\ddot{\theta}_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1 - \\
&\quad - 4\dot{\phi}_1 \dot{\psi}_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \cos^2 \theta_1 - 4\dot{\psi}_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \cos^2 \varphi_1 \cos \theta_1 - \\
&\quad - 2\dot{\phi}_1 \dot{\theta}_1 \sin^2 \varphi_1 \cos \theta_1 + 2\dot{\phi}_1 \dot{\theta}_1 \cos^2 \varphi_1 \cos \theta_1 - 2\dot{\theta}_1^2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \sin \theta_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= \left( \frac{m_1}{2} (\zeta_{c1}^2 + \eta_{c1}^2) + \frac{I_{\xi 1}}{2} \right) \left( 2\ddot{\theta}_1 \cos^2 \varphi_1 - 2\dot{\psi}_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1 + \right. \\
&\quad + 2\dot{\varphi}_1 \dot{\psi}_1 \sin^2 \varphi_1 \cos \theta_1 - 2\dot{\varphi}_1 \dot{\psi}_1 \cos^2 \varphi_1 \cos \theta_1 + \\
&\quad \left. + 2\dot{\psi}_1 \dot{\theta}_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \sin \theta_1 - 4\dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 \cos \varphi_1 \sin \varphi_1 \right) + \\
&\quad + \left( \frac{m_1}{2} (\xi_{c1}^2 + \eta_{c1}^2) + \frac{I_{\zeta 1}}{2} \right) \left( 2\dot{\psi}_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1 + 2\ddot{\theta}_1 \sin^2 \varphi_1 - \right. \\
&\quad - 2\dot{\varphi}_1 \dot{\psi}_1 \sin^2 \varphi_1 \cos \theta_1 + 2\dot{\varphi}_1 \dot{\psi}_1 \cos^2 \varphi_1 \cos \theta_1 - \\
&\quad \left. - 2\dot{\psi}_1 \dot{\theta}_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \sin \theta_1 + 4\dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \right)
\end{aligned}$$

Для боковин (приведено только для правой боковины, для левой аналогично с соответствующими индексами):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_4} \right) = m_4 \ddot{x}_4$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_4} \right) = m_4 \ddot{y}_4$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_4} \right) = m_4 \ddot{z}_4$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_4} \right) &= \left( \frac{m_4}{2} (\zeta_{c4}^2 + \eta_{c4}^2) + \frac{I_{\xi 4}}{2} \right) \left( 2\ddot{\varphi}_4 - 2\dot{\psi}_4 \sin \theta_4 - 2\dot{\psi}_4 \dot{\theta}_4 \cos \theta_4 \right) \\
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_4} \right) &= \left( \frac{m_4}{2} (\zeta_{c4}^2 + \eta_{c4}^2) + \frac{I_{\xi 4}}{2} \right) \left( 2\dot{\psi}_4 \sin^2 \theta_4 - 2\ddot{\varphi}_4 \sin \theta_4 + \right. \\
&\quad \left. + 4\dot{\psi}_4 \dot{\theta}_4 \sin \theta_4 \cos \theta_4 - 2\dot{\varphi}_4 \dot{\theta}_4 \cos \theta_4 \right) + \\
&\quad + \left( \frac{m_4}{2} (\xi_{c4}^2 + \zeta_{c4}^2) + \frac{I_{\eta 4}}{2} \right) \left( 2\dot{\psi}_4 \sin^2 \varphi_4 \cos^2 \theta_4 + 2\ddot{\theta}_4 \sin \varphi_4 \cos \varphi_4 \cos \theta_4 + \right. \\
&\quad + 4\dot{\varphi}_4 \dot{\psi}_4 \sin \varphi_4 \cos \varphi_4 \cos^2 \theta_4 - 4\dot{\psi}_4 \dot{\theta}_4 \sin^2 \varphi_4 \sin \theta_4 \cos \theta_4 - \\
&\quad - 2\dot{\varphi}_4 \dot{\theta}_4 \sin^2 \varphi_4 \cos \theta_4 + 2\dot{\varphi}_4 \dot{\theta}_4 \cos^2 \varphi_4 \cos \theta_4 - \\
&\quad \left. - 2\dot{\theta}_4^2 \sin \varphi_4 \cos \varphi_4 \sin \theta_4 \right) + \\
&\quad + \left( \frac{m_4}{2} (\xi_{c4}^2 + \eta_{c4}^2) + \frac{I_{\zeta 4}}{2} \right) \left( 2\dot{\psi}_4 \cos^2 \varphi_4 \cos^2 \theta_4 - 2\ddot{\theta}_4 \sin \varphi_4 \cos \varphi_4 \cos \theta_4 - \right. \\
&\quad - 4\dot{\varphi}_4 \dot{\psi}_4 \sin \varphi_4 \cos \varphi_4 \cos^2 \theta_4 - 4\dot{\psi}_4 \dot{\theta}_4 \cos^2 \varphi_4 \sin \theta_4 \cos \theta_4 + \\
&\quad \left. + 2\dot{\varphi}_4 \dot{\theta}_4 \sin^2 \varphi_4 \cos \theta_4 - 2\dot{\varphi}_4 \dot{\theta}_4 \cos^2 \varphi_4 \cos \theta_4 + 2\dot{\theta}_4^2 \sin \varphi_4 \cos \varphi_4 \sin \theta_4 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_4} \right) &= \left( \frac{m_4}{2} (\xi_{c4}^2 + \zeta_{c4}^2) + \frac{I_{\eta 4}}{2} \right) \left( 2\ddot{\theta}_4 \cos^2(\varphi_4) + 2\ddot{\psi}_4 \sin(\varphi_4) \cos(\varphi_4) \cos(\theta_4) - \right. \\
&\quad \left. - 2\dot{\varphi}_4 \dot{\psi}_4 \sin^2(\varphi_4) \cos(\theta_4) + 2\dot{\varphi}_4 \dot{\psi}_4 \cos^2(\varphi_4) \cos(\theta_4) - \right. \\
&\quad \left. - 2\dot{\psi}_4 \dot{\theta}_4 \sin(\varphi_4) \cos(\varphi_4) \sin(\theta_4) - 4\dot{\varphi}_4 \dot{\theta}_4 \sin(\varphi_4) \cos(\varphi_4) \right) + \\
&+ \left( \frac{m_4}{2} (\xi_{c4}^2 + \eta_{c4}^2) + \frac{I_{\zeta 4}}{2} \right) \left( 2\ddot{\theta}_4 \sin^2(\varphi_4) - 2\ddot{\psi}_4 \sin(\varphi_4) \cos(\varphi_4) \cos(\theta_4) + \right. \\
&\quad \left. + 2\dot{\varphi}_4 \dot{\psi}_4 \sin^2(\varphi_4) \cos(\theta_4) - 2\dot{\varphi}_4 \dot{\psi}_4 \cos^2(\varphi_4) \cos(\theta_4) + \right. \\
&\quad \left. + 2\dot{\psi}_4 \dot{\theta}_4 \sin(\varphi_4) \cos(\varphi_4) \sin(\theta_4) + 4\dot{\varphi}_4 \dot{\theta}_4 \sin(\varphi_4) \cos(\varphi_4) \right) \\
\frac{\partial T}{\partial \varphi_4} &= \left( \frac{m_4}{2} (\xi_{c4}^2 + \eta_{c4}^2) + \frac{I_{\zeta 1}}{2} \right) \left( 2\dot{\theta}_4^2 \sin \varphi_4 \cos \varphi_4 - \right. \\
&\quad \left. - 2\dot{\psi}_4^2 \sin \varphi_4 \cos \varphi_4 \cos^2 \theta_4 + \right. \\
&\quad \left. + 2\dot{\psi}_4 \dot{\theta}_4 \sin^2 \varphi_4 \cos \theta_4 - 2\dot{\psi}_4 \dot{\theta}_4 \cos^2 \varphi_4 \cos \theta_4 \right) + \\
&+ \left( \frac{m_4}{2} (\xi_{c4}^2 + \zeta_{c4}^2) + \frac{I_{\eta 4}}{2} \right) \left( 2\dot{\psi}_4^2 \sin \varphi_4 \cos \varphi_4 \cos^2 \theta_4 - \right. \\
&\quad \left. - 2\dot{\theta}_4^2 \sin \varphi_4 \cos \varphi_4 - 2\dot{\psi}_4 \dot{\theta}_4 \sin^2 \varphi_4 \cos \theta_4 + 2\dot{\psi}_4 \dot{\theta}_4 \cos^2 \varphi_4 \cos \theta_4 \right) \\
\frac{\partial T}{\partial \theta_4} &= \left( \frac{m_4}{2} (\zeta_{c4}^2 + \eta_{c4}^2) + \frac{I_{\xi 4}}{2} \right) \left( 2\dot{\psi}_4^2 \sin \theta_4 \cos \theta_4 - 2\dot{\varphi}_4 \dot{\psi}_4 \cos \theta_4 \right) + \\
&+ \left( \frac{m_4}{2} (\xi_{c4}^2 + \zeta_{c4}^2) + \frac{I_{\eta 4}}{2} \right) \left( -2\dot{\psi}_4^2 \sin^2 \varphi_4 \sin \theta_4 \cos \theta_4 - \right. \\
&\quad \left. - 2\dot{\psi}_4 \dot{\theta}_4 \sin \varphi_4 \cos \varphi_4 \sin \theta_4 \right) + \\
&+ \left( \frac{m_4}{2} (\xi_{c4}^2 + \eta_{c4}^2) + \frac{I_{\zeta 4}}{2} \right) \left( 2\dot{\psi}_4 \dot{\theta}_4 \sin \varphi_4 \cos \varphi_4 \sin \theta_4 - \right. \\
&\quad \left. - 2\dot{\psi}_4^2 \cos^2 \varphi_4 \sin \theta_4 \cos \theta_4 \right)
\end{aligned}$$

### 3.4 Вывод потенциальной энергии тележки

Потенциальная энергия рассматриваемой системы состоит из потенциальной энергии деформации упругих элементов, введенных в расчетную схему и потенциальной энергии составляющих систему тел в поле гравитационного притяжения. За нулевой уровень потенциальной энергии

принято начальное состояние системы. В начальном положении упругие элементы, работающие в горизонтальной плоскости, не нагружены статической нагрузкой. В этом случае, выражение для определения потенциальной энергии упругой деформации  $i$ -го элемента в направлении осей  $x$  и  $y$  будет иметь вид:

$$\Pi_{xi} = c_{xi} \frac{f_{xi}^2}{2}, \quad \Pi_{yi} = c_{yi} \frac{f_{yi}^2}{2}. \quad (3.8)$$

где:  $f_{xi}, f_{yi}$  – деформация  $i$ -го упругого элемента в направлении соответствующей оси от перемещения опор, вызванных как перемещением балок, так и их поворотом в пространстве.

В случае начального нагружения упругих элементов статической нагрузкой, что имеет место в вертикальных упругих элементах, уравнение изменения потенциальной энергии принимает вид:

$$\Pi_{zi} = \frac{c_{zi}}{2} (f_{zi} + f_{cmi})^2, \quad (3.9)$$

где:  $f_{zi}$  – вертикальная деформация  $i$ -го упругого элемента относительно положения статического равновесия,  $f_{cmi}$  – статическая деформация  $i$ -го упругого элемента.

Уравнение потенциальной энергии тела  $m_i$  в поле тяготения, как известно, имеет вид:

$$\Pi_{Gi} = m_i \cdot g \cdot z_i \quad (3.10)$$

Общая потенциальная энергия системы будет равна сумме потенциальной энергии упругой деформации каждого элемента и потенциальной энергии сил тяжести.

Для определения деформации упругих элементов необходимо знать зависимости перемещения точек нагружения упругих элементов от обобщенных координат. Их можно получить через перемещения центров масс звеньев, длин их плеч и приращения ориентационных углов поворота звеньев. Геометрические характеристики модели с описанием параметров и их числовыми значениями приведены в таблице 4.2 главы 4.



Выразим координаты характерных точек через обобщенные координаты. Для передней колесной пары такими характерными точками будут точки  $A$  и  $Q$  (см. рисунок 3.1), являющиеся опорными для эквивалентных упругих элементов буксового узла. Для второй колёсной пары аналогичные точки это  $E$  и  $K$ . Для упрощения задачи примем, что в начальном положении системы углы поворота равны нулю. Запишем уравнения таким образом, что для первой колёсной пары будет использоваться первый элемент списков, а для второй – второй элемент:

$$\begin{cases} x_a = x_b - l_c \cos \theta_b \sin \psi_b \\ y_a = y_b - l_c (1 - \cos \theta_b \cos \psi_b); \\ z_a = z_b + l_c \sin \theta_b \end{cases} \quad \text{где: } a = \{A, E\}, b = \{1, 2\}, c = \{1A, 2E\}. \quad (3.11)$$

Для точек с левой стороны модели уравнения примут вид:

$$\begin{cases} x_a = x_b + l_c \cos \theta_b \sin \psi_b \\ y_a = y_b + l_c (1 - \cos \theta_b \cos \psi_b); \\ z_a = z_b - l_c \sin \theta_b \end{cases} \quad \text{где: } a = \{Q, K\}, b = \{1, 2\}, c = \{1Q, 2K\}, \quad (3.12)$$

где  $l_{1\{A,Q\}}$  – расстояние от начала подвижной системы отсчёта, связанной с первой колёсной парой до правого буксового узла (точка  $A$ ) и левого буксового узла (точка  $Q$ );  $l_{2\{E,K\}}$  – расстояние от начала подвижной системы отсчёта, связанной со второй колёсной парой до правого буксового узла (точка  $E$ ) и левого буксового узла (точка  $K$ )

При определении точек контакта поверхности катания колеса с рельсом необходимо учитывать влияние угла наклона диска колеса к вертикали, равного  $\theta_1$  для первой колесной пары и  $\theta_2$  для второй колесной пары соответственно:

$$\begin{cases} x_{A'} = x_1 - (l_{1A'} + R_A \sin \theta_1) \cos \theta_1 \sin \psi_1 \\ y_{A'} = y_1 - (l_{1A'} + R_A \sin \theta_1) (1 - \cos \theta_1 \cos \psi_1) \\ z_{A'} = z_1 + (l_{1A'} + R_A \sin \theta_1) \sin \theta_1 \\ x_{Q'} = x_1 + (l_{1Q'} - R_Q \sin \theta_1) \cos \theta_1 \sin \psi_1 \\ y_{Q'} = y_1 + (l_{1Q'} - R_Q \sin \theta_1) (1 - \cos \theta_1 \cos \psi_1) \\ z_{Q'} = z_1 - (l_{1Q'} - R_Q \sin \theta_1) \sin \theta_1 \end{cases} \quad (3.13)$$

Для второй колесной пары получим уравнения:

$$\begin{cases} x_{E'} = x_2 - (l_{2E'} + R_E \sin \theta_2) \cos \theta_2 \sin \psi_2 \\ y_{E'} = y_2 - (l_{2E'} + R_E \sin \theta_2)(1 - \cos \theta_2 \cos \psi_2) \\ z_{E'} = z_2 + (l_{2E'} + R_E \sin \theta_2) \sin \theta_2 \end{cases} \quad (3.14)$$

$$\begin{cases} x_{K'} = x_2 + (l_{2K'} - R_K \sin \theta_2) \cos \theta_2 \sin \psi_2 \\ y_{K'} = y_2 + (l_{2K'} - R_K \sin \theta_2)(1 - \cos \theta_2 \cos \psi_2) \\ z_{K'} = z_2 - (l_{2K'} - R_K \sin \theta_2) \sin \theta_2 \end{cases}$$

Для надрессорной балки определим положение опорных точек основного рессорного комплекта:

$$\begin{cases} x_T = x_3 - l_{3T} \cos \theta_3 \sin \psi_3 \\ y_T = y_3 - l_{3T} (1 - \cos \theta_3 \cos \psi_3) \\ z_T = z_3 + l_{3T} \sin \theta_3 \end{cases} \quad (3.15)$$

$$\begin{cases} x_U = x_3 + l_{3U} \cos \theta_3 \sin \psi_3 \\ y_U = y_3 + l_{3U} (1 - \cos \theta_3 \cos \psi_3) \\ z_U = z_3 - l_{3U} \sin \theta_3 \end{cases}$$

Для правой по ходу движения боковины положения опорных точек упругих элементов определяются уравнениями:

для переднего буксового узла

$$\begin{cases} x_B = x_4 + l_{4B} (1 - \cos \theta_4 \cos \psi_4) \\ y_B = y_4 - l_{4B} \cos \theta_4 \sin \psi_4 \\ z_B = z_4 + l_{4B} \sin \theta_4 \end{cases} \quad (3.16)$$

для заднего буксового узла

$$\begin{cases} x_D = x_4 - l_{4D} (1 - \cos \theta_4 \cos \psi_4) \\ y_D = y_4 + l_{4D} \cos \theta_4 \sin \psi_4 \\ z_D = z_4 - l_{4D} \sin \theta_4 \end{cases} \quad (3.17)$$

Для левой боковины положения опорных точек определяются уравнениями:

для переднего буксового узла

$$\begin{cases} x_N = x_5 + l_{5N} (1 - \cos \theta_5 \cos \psi_5) \\ y_N = y_5 - l_{5N} \cos \theta_5 \sin \psi_5 \\ z_N = z_5 + l_{5N} \sin \theta_5 \end{cases} \quad (3.18)$$

для заднего буксового узла

$$\begin{cases} x_L = x_5 - l_{5L} (1 - \cos \theta_5 \cos \psi_5) \\ y_L = y_5 + l_{5L} \cos \theta_5 \sin \psi_5 \\ z_L = z_5 - l_{5L} \sin \theta_5 \end{cases} \quad (3.19)$$

Положения опорных точек пружин основного рессорного комплекта правой боковой рамы определяется уравнениями:

$$\begin{cases} x_F = x_4 + h_4 (\sin \varphi_4 \sin \psi_4 + \cos \varphi_4 \cos \psi_4 \sin \theta_4) \\ y_F = y_4 - h_4 (\cos \varphi_4 \sin \psi_4 \sin \theta_4 - \sin \varphi_4 \cos \psi_4) \\ z_F = z_4 - h_4 (1 - \cos \varphi_4 \cos \theta_4). \end{cases} \quad (3.20)$$

То же, но для левой боковины:

$$\begin{cases} x_G = x_5 + h_5 (\sin \varphi_5 \sin \psi_5 + \cos \varphi_5 \cos \psi_5 \sin \theta_5) \\ y_G = y_5 - h_5 (\cos \varphi_5 \sin \psi_5 \sin \theta_5 - \sin \varphi_5 \cos \psi_5) \\ z_G = z_5 - h_5 (1 - \cos \varphi_5 \cos \theta_5). \end{cases} \quad (3.21)$$

Кроме того, необходимо определить положения опорных точек подклиновых пружин ( $S_1 \div S_4$ ):

$$\begin{cases} x_{S1} = x_F + l_{FS1} (1 - \cos \theta_4 \cos \psi_4) \\ y_{S1} = y_F - l_{FS1} \sin \psi_4 \cos \theta_4 \\ z_{S1} = z_F + l_{FS1} \sin \theta_4 \\ \\ x_{S2} = x_F - l_{FS2} (1 - \cos \theta_4 \cos \psi_4) \\ y_{S2} = y_F + l_{FS2} \sin \psi_4 \cos \theta_4 \\ z_{S2} = z_F - l_{FS2} \sin \theta_4 \end{cases} \quad (3.22)$$

$$\begin{cases} x_{S3} = x_G + l_{GS3}(1 - \cos \theta_5 \cos \psi_5) \\ y_{S3} = y_G - l_{GS3} \sin \psi_5 \cos \theta_5 \\ z_{S3} = z_G + l_{GS3} \sin \theta_5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{S4} = x_G - l_{GS4}(1 - \cos \theta_5 \cos \psi_5) \\ y_{S4} = y_G + l_{GS4} \sin \psi_5 \cos \theta_5 \\ z_{S4} = z_G - l_{GS4} \sin \theta_5 \end{cases}$$

Обратим внимание, что положения опорных точек подклиновых пружин определяется относительно опорных точек основного рессорного комплекта, а не условных центров боковин.

Определим положения опорных точек подклиновых пружин на фрикционных клиньях ( $K_1 \div K_4$ ):

$$\begin{aligned} y_{K1} &= y_T, & z_{K1} &= z_T + x_{S1} - x_T \\ y_{K2} &= y_T, & z_{K2} &= z_T + x_T - x_{S2} \\ y_{K3} &= y_U, & z_{K3} &= z_U + x_U - x_{S3} \\ y_{K4} &= y_U, & z_{K4} &= z_U + x_{S4} - x_U. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Пронумеруем все относящиеся к одному узлу упругие элементы (рисунок 3.1) и запишем для каждого элемента величину деформации  $\Delta x_i$ ,  $\Delta y_i$ ,  $\Delta z_i$ , где  $i$  – номер упругого элемента.

Деформации упругих элементов, моделирующих взаимодействие колеса и рельса:

$$\begin{aligned} \Delta y_1 &= \beta_1 - y_{A1}, & \Delta z_1 &= \gamma_1 - z_{A1} \\ \Delta y_2 &= \beta_2 - y_{E1}, & \Delta z_2 &= \gamma_2 - z_{E1} \\ \Delta y_3 &= y_{K1} - \beta_3, & \Delta z_3 &= \gamma_3 - z_{K1} \\ \Delta y_4 &= y_{Q1} - \beta_4, & \Delta z_4 &= \gamma_4 - z_{Q1}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

где:  $y_{A1}$ ,  $z_{A1}$  и т.д. – текущее значение координаты соответствующей точки колесной пары.

Упругие деформации элементов буксового узла, моделирующие контактные и изгибные деформации:

$$\begin{aligned}
\Delta x_5 &= x_B - x_A, & \Delta y_5 &= y_B - y_A, & \Delta z_5 &= z_A - z_B \\
\Delta x_6 &= x_E - x_D, & \Delta y_6 &= y_D - y_E, & \Delta z_6 &= z_E - z_D \\
\Delta x_7 &= x_K - x_L, & \Delta y_7 &= y_K - y_L, & \Delta z_7 &= z_K - z_L \\
\Delta x_8 &= x_N - x_Q, & \Delta y_8 &= y_Q - y_N, & \Delta z_8 &= z_Q - z_N
\end{aligned}
\tag{3.25}$$

Упругие деформации пружин основных рессорных комплектов:

$$\begin{aligned}
\Delta x_9 &= x_F - x_T, & \Delta y_9 &= y_F - y_T, & \Delta z_9 &= z_F - z_T \\
\Delta x_{10} &= x_G - x_U, & \Delta y_{10} &= y_U - y_G, & \Delta z_{10} &= z_G - z_U
\end{aligned}
\tag{3.26}$$

Упругие деформации подклиновых пружин:

$$\begin{aligned}
\Delta y_{11} &= y_{S1} - y_{K1}, & \Delta z_{11} &= z_{S1} - z_{K1} \\
\Delta y_{12} &= y_{S2} - y_{K2}, & \Delta z_{12} &= z_{S2} - z_{K2} \\
\Delta y_{13} &= y_{K3} - y_{S3}, & \Delta z_{13} &= z_{S3} - z_{K3} \\
\Delta y_{14} &= y_{K4} - y_{S4}, & \Delta z_{14} &= z_{S4} - z_{K4}
\end{aligned}
\tag{3.27}$$

При перекосе тележки в плане возникают моменты сопротивления повороту надрессорной балки и колесных пар в буксовых проемах, которые также необходимо отнести к группе обобщенных потенциальных сил. В общем случае зависимость возвращающего момента от перекоса тележки нелинейная, однако, в первом приближении зададим её некоторым линейным коэффициентом  $\lambda$  по аналогии с линейными упругими элементами. Остальными моментами от относительного поворота элементов можно пренебречь, т.к. конструкция тележки представляет собой несвязанную раму, поэтому на практике значения этих моментов сопротивления повороту будут на несколько порядков меньше принятых в модели. Учитывая сказанное, введем угловые деформации указанных узлов:

$$\begin{aligned}
\Delta\psi_B &= \psi_1 - \psi_4, & \Delta\psi_D &= \psi_2 - \psi_4 \\
\Delta\psi_L &= \psi_2 - \psi_5, & \Delta\psi_N &= \psi_1 - \psi_5 \\
\Delta\psi_T &= \psi_3 - \psi_4, & \Delta\psi_U &= \psi_3 - \psi_5
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Потенциальная энергия всей системы запишется в виде:

$$\Pi = \sum_{i=1}^5 m_i \cdot g \cdot z_i + \sum_{j=1}^{14} \left( c_{xj} \frac{\Delta x_j^2}{2} + c_{yj} \frac{\Delta y_j^2}{2} + c_{zj} \frac{(f_{cmj} - \Delta z_j)^2}{2} \right) + \sum_{k=1}^6 \lambda_k \frac{\Delta \psi_k^2}{2} \tag{3.29}$$

Для составления системы дифференциальных уравнений необходимо найти частные производные  $\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$  по обобщенным координатам.

Ниже приведены производные только для первой колёсной пары, так как для второй колёсной пары и надрессорной балки вычисления и структура уравнений аналогичные.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} &= c_{x5} (\ell_{4B} (1 - \cos \theta_4 \cos \psi_4) + \ell_{1A} \cos \theta_1 \sin \psi_1 + x_1 - x_4) + \\
&+ c_{x8} (\ell_{5N} (1 - \cos \theta_5 \cos \psi_5) - \ell_{1Q} \cos \theta_1 \sin \psi_1 - x_1 + x_5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi}{\partial y_1} &= c_{y5} (\ell_{1A} (1 - \cos \theta_1 \cos \psi_1) - \ell_{4B} \cos \theta_4 \sin \psi_4 + y_1 - y_4) + \\
&+ c_{y8} (-\ell_{1Q} (1 - \cos \theta_1 \cos \psi_1) - \ell_{5N} \cos \theta_5 \sin \psi_5 + y_1 - y_5) + \\
&+ c_{y1} ((1 - \cos \theta_1 \cos \psi_1)(\ell_{1A'} + R_A \sin \theta_1) + y_1 - \beta_1) - \\
&- c_{y4} ((1 - \cos \theta_1 \cos \psi_1)(\ell_{1Q'} - R_Q \sin \theta_1) - y_1 + \beta_4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi}{\partial z_1} &= c_{z5} (\ell_{4B} \sin \theta_4 - \ell_{1A} \sin \theta_1 + z_1 - z_4) + \\
&+ c_{z8} (\ell_{1Q} \sin \theta_1 + \ell_{5N} \sin \theta_5 + z_1 - z_5) - \\
&- c_{z1} (\sin \theta_1 (\ell_{1A'} + R_A \sin \theta_1) - z_1 + \gamma_1) + \\
&+ c_{z4} (\sin \theta_1 (\ell_{1Q'} - R_Q \sin \theta_1) + z_1 - \gamma_4)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \psi_1} = & c_{x8} \ell_{1Q} \cos \theta_1 \cos \psi_1 (\ell_{1Q} \cos \theta_1 \sin \psi_1 - \ell_{5N} (1 - \cos \theta_5 \cos \psi_5) - x_1 + x_5) + \\ & + c_{x5} \ell_{1A} \cos \theta_1 \cos \psi_1 (\ell_{4B} (1 - \cos \theta_4 \cos \psi_4) - \ell_{1A} \cos \theta_1 \sin \psi_1 + x_1 - x_4) + \\ & + c_{y5} \ell_{1A} \cos \theta_1 \sin \psi_1 (\ell_{1A} (1 - \cos \theta_1 \cos \psi_1) - \ell_{4B} \cos \theta_4 \sin \psi_4 + y_1 - y_4) + \\ & + c_{y8} \ell_{1Q} \cos \theta_1 \sin \psi_1 (\ell_{1Q} (1 - \cos \theta_1 \cos \psi_1) + \ell_{5N} \cos \theta_5 \sin \psi_5 - y_1 + y_5) + \\ & + c_{y1} \cos \theta_1 \sin \psi_1 (\ell_{1A'} + R_A \sin \theta_1) ((1 - \cos \theta_1 \cos \psi_1) (\ell_{1A'} + R_A \sin \theta_1) + y_1 - \beta_1) + \\ & + c_{y4} \cos \theta_1 \sin \psi_1 (\ell_{1Q'} - R_Q \sin \theta_1) ((1 - \cos \theta_1 \cos \psi_1) ((\ell_{1Q'} - R_Q \sin \theta_1) - y_1 + \beta_4) + \\ & + (\lambda_1 + \lambda_4) \psi_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_1} = & c_{x8} \ell_{1Q} \sin \theta_1 \sin \psi_1 (\ell_{5N} (1 - \cos \theta_5 \cos \psi_5) - \ell_{1Q} \cos \theta_1 \sin \psi_1) + x_1 - x_5) - \\ & - c_{x5} \ell_{1A} \sin \theta_1 \sin \psi_1 (\ell_{4B} (1 - \cos \theta_4 \cos \psi_4) + \ell_{1A} \cos \theta_1 \sin \psi_1 + x_1 - x_4) + \\ & + c_{y5} \ell_{1A} \sin \theta_1 \cos \psi_1 (\ell_{1A} (1 - \cos \theta_1 \cos \psi_1) - \ell_{4B} \cos \theta_4 \sin \psi_4 + y_1 - y_4) + \\ & + c_{y8} \ell_{1Q} \sin \theta_1 \cos \psi_1 (\ell_{1Q} (1 - \cos \theta_1 \cos \psi_1) + \ell_{5N} \cos \theta_5 \sin \psi_5 - y_1 + y_5) + \\ & + c_{y1} (R_{A'} \cos \theta_1 (1 - \cos \theta_1 \cos \psi_1) + \sin \theta_1 \cos \psi_1 (\ell_{1A'} + R_{A'} \sin \theta_1)) \\ & ((1 - \cos \theta_1 \cos \psi_1) (\ell_{1A'} + R_A \sin \theta_1) + y_1 - \beta_1) - \\ & - c_{y4} (R_Q \cos \theta_1 (1 - \cos \theta_1 \cos \psi_1) - \sin \theta_1 \cos \psi_1 (\ell_{1Q'} - R_Q \sin \theta_1)) \\ & ((1 - \cos \theta_1 \cos \psi_1) (\ell_{1Q'} - R_Q \sin \theta_1) - y_1 + \beta_4) + \\ & + c_{z1} (R_A \cos \theta_1 \sin \theta_1 + \cos \theta_1 (\ell_{1A'} + R_A \sin \theta_1)) (\sin \theta_1 (\ell_{1A'} + R_A \sin \theta_1) - z_1 + \gamma_1) + \\ & + c_{z4} (R_Q \cos \theta_1 \sin \theta_1 - \cos \theta_1 (\ell_{1Q'} - R_Q \sin \theta_1)) (-\sin \theta_1 (\ell_{1Q'} - R_Q \sin \theta_1) - z_1 + \gamma_1) + \\ & + c_{z5} \ell_{1A} \cos \theta_1 (\ell_{1A} \sin \theta_1 - \ell_{4B} \sin \theta_4 - z_1 + z_4) + \\ & + c_{z8} \ell_{1Q} \cos \theta_1 (\ell_{1Q} \sin \theta_1 + \ell_{5N} \sin \theta_5 + z_1 - z_5) \end{aligned}$$

Ниже приведены производные от потенциальной энергии по обобщенным координатам для правой боковой рамы. Для левой боковой рамы выражения производных от потенциальной энергии имеют аналогичный вид с учетом индексов.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi}{\partial x_4} = & c_{x5}(x_4 - x_1 - \ell_{4B}(1 - \cos \theta_4 \cos \psi_4) - \ell_{1A} \cos \theta_1 \sin \psi_1) - \\
& - c_{x6}(x_2 - x_4 - \ell_{4D}(1 - \cos \theta_4 \cos \psi_4) + \ell_{2E} \cos \theta_2 \sin \psi_2) + \\
& + c_{x9}(x_4 - x_3 - \ell_{3T} \cos \theta_3 \sin \psi_3 - h_4(\cos \varphi_4 \cos \psi_4 \sin \theta_4 + \sin \varphi_4 \sin \psi_4)) - \\
& - c_{z11}(h_4(1 - \cos \theta_4 \cos \varphi_4) + \ell_{FS1}(1 - \cos \theta_4 \cos \psi_4 - \sin \theta_4) + \\
& \ell_{3T}(\cos \theta_3 \sin \psi_3 + \sin \theta_3) + h_4(\cos \varphi_4 \cos \psi_4 \sin \theta_4 + \sin \varphi_4 \sin \psi_4) + \\
& + x_3 - x_4 - z_3 + z_4) + c_{z12}(h_4(1 - \cos \theta_4 \cos \varphi_4) + \\
& + \ell_{FS2}(1 - \cos \theta_4 \cos \psi_4 + \sin \theta_4) + \ell_{3T}(\sin \theta_3 - \cos \theta_3 \sin \psi_3) - \\
& - h_4(\cos \varphi_4 \cos \psi_4 \sin \theta_4 + \sin \varphi_4 \sin \psi_4) - x_3 + x_4 - z_3 + z_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi}{\partial y_4} = & c_{y5}(y_4 - y_1 - \ell_{1A}(1 - \cos \theta_1 \cos \psi_1) + \ell_{4B} \cos \theta_4 \sin \psi_4) + \\
& + c_{y6}(y_4 - y_2 - \ell_{2E}(1 - \cos \theta_2 \cos \psi_2) - \ell_{4D} \cos \theta_4 \sin \psi_4) + \\
& + c_{y9}(y_4 - y_3 - \ell_{3T}(1 - \cos \theta_3 \cos \psi_3) + h_4(\cos \varphi_4 \sin \psi_4 \sin \theta_4 - \sin \varphi_4 \cos \psi_4)) + \\
& + c_{y11}(y_4 - y_3 - \ell_{3T}(1 - \cos \theta_3 \cos \psi_3) + \ell_{FS1} \cos \theta_4 \sin \psi_4 + \\
& + h_4(\cos \varphi_4 \sin \psi_4 \sin \theta_4 - \sin \varphi_4 \cos \psi_4)) + \\
& + c_{y12}(y_4 - y_3 - \ell_{3T}(1 - \cos \theta_3 \cos \psi_3) - \ell_{FS2} \cos \theta_4 \sin \psi_4 + \\
& + h_4(\cos \varphi_4 \sin \psi_4 \sin \theta_4 - \sin \varphi_4 \cos \psi_4))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi}{\partial z_4} = & c_{z5}(z_4 - z_1 + \ell_{1A} \sin \theta_1 + \ell_{4B} \sin \theta_4) + \\
& + c_{z6}(z_4 - z_2 + \ell_{2E} \sin \theta_2 - \ell_{4D} \sin \theta_4) + \\
& + c_{z9}(z_4 - y_3 + h_4(1 - \cos \theta_4 \cos \varphi_4) + \ell_{3T} \sin \theta_3) + \\
& + c_{z11}(h_4(1 - \cos \theta_4 \cos \varphi_4) + \ell_{FS1}(1 - \cos \theta_4 \cos \psi_4 - \sin \theta_4) + \\
& + \ell_{3T}(\sin \theta_3 + \cos \theta_3 \sin \psi_3 + h_4(\cos \varphi_4 \cos \psi_4 \sin \theta_4 + \sin \varphi_4 \sin \psi_4)) + \\
& + x_3 - x_4 - z_3 + z_4) + \\
& + c_{z12}(h_4(1 - \cos \theta_4 \cos \varphi_4) + \ell_{FS2}(1 - \cos \theta_4 \cos \psi_4 + \sin \theta_4) + \\
& + \ell_{3T}(\sin \theta_3 - \cos \theta_3 \sin \psi_3 - h_4(\cos \varphi_4 \cos \psi_4 \sin \theta_4 + \sin \varphi_4 \sin \psi_4)) + \\
& - x_3 + x_4 - z_3 + z_4)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_4} = & c_{x9} h_4 (\cos \psi_4 \sin \theta_4 \sin \varphi_4 - \cos \varphi_4 \sin \psi_4) (x_4 - x_3 - \ell_{3T} \cos \theta_3 \sin \psi_3 - \\
& - h_4 (\cos \varphi_4 \cos \psi_4 \sin \theta_4 + \sin \varphi_4 \sin \psi_4)) + c_{y9} h_4 (\cos \varphi_4 \cos \psi_4 + \\
& + \sin \theta_4 \sin \varphi_4 \sin \psi_4) (y_3 - y_4 + \ell_{3T} (1 - \cos \theta_3 \cos \psi_3)) + h_4 (\cos \psi_4 \sin \varphi_4 - \\
& - \cos \varphi_4 \sin \theta_4 \sin \psi_4)) + c_{z9} h_4 (\cos \theta_4 \sin \varphi_4 (h_4 (1 - \cos \theta_4 \cos \varphi_4) + \ell_{3T} \sin \theta_3 - z_3 + z_4) + \\
& + c_{y11} h_4 (\cos \varphi_4 \cos \psi_4 + \sin \theta_4 \sin \varphi_4 \sin \psi_4) (\ell_{3T} (1 - \cos \theta_3 \cos \psi_3) - \ell_{FS1} \cos \theta_4 \sin \psi_4 + \\
& + h_4 (\cos \psi_4 \sin \varphi_4 - \cos \varphi_4 \sin \theta_4 \sin \psi_4) + y_3 - y_4) + \\
& + c_{y12} h_4 (\cos \varphi_4 \cos \psi_4 + \sin \theta_4 \sin \varphi_4 \sin \psi_4) (\ell_{3T} (1 - \cos \theta_3 \cos \psi_3) + \ell_{FS2} \cos \theta_4 \sin \psi_4 + \\
& + h_4 (\cos \psi_4 \sin \varphi_4 - \cos \varphi_4 \sin \theta_4 \sin \psi_4) + y_3 - y_4) + \\
& + c_{z11} h_4 (\cos \theta_4 \sin \varphi_4 + \cos \varphi_4 \sin \psi_4 - \cos \psi_4 \sin \theta_4 \sin \varphi_4) (h_4 (1 - \cos \theta_4 \cos \varphi_4 + \\
& + \cos \varphi_4 \cos \psi_4 \sin \theta_4 + \sin \varphi_4 \sin \psi_4) + \ell_{FS1} (1 - \cos \theta_4 \cos \psi_4 - \sin \theta_4) + \\
& + \ell_{3T} (\sin \theta_3 + \cos \theta_3 \sin \psi_3) + x_3 - x_4 - z_3 + z_4) + \\
& + c_{z12} h_4 (\cos \theta_4 \sin \varphi_4 - \cos \varphi_4 \sin \psi_4 - \cos \psi_4 \sin \theta_4 \sin \varphi_4) (h_4 (1 - \cos \theta_4 \cos \varphi_4 - \\
& - \cos \varphi_4 \cos \psi_4 \sin \theta_4 + \sin \varphi_4 \sin \psi_4) + \ell_{FS2} (1 - \cos \theta_4 \cos \psi_4 + \sin \theta_4) + \\
& + \ell_{3T} (\sin \theta_3 - \cos \theta_3 \sin \psi_3) + x_3 - x_4 - z_3 + z_4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi}{\partial \psi_4} = & c_{x5} \ell_{C4B} \cos \theta_4 \sin \psi_4 (x_1 - x_4 + \ell_{4B} (1 - \cos \theta_4 \cos \psi_4) + \ell_{1A} \cos \theta_1 \sin \psi_1) + \\
& + c_{y5} \ell_{4B} \cos \theta_4 \cos \psi_4 (y_4 - y_1 + \ell_{4B} \cos \theta_4 \sin \psi_4 - \ell_{1A} (1 - \cos \theta_1 \cos \psi_1)) - \\
& - c_{x6} \ell_{4D} \cos \theta_4 \sin \psi_4 (x_2 - x_4 + \ell_{4D} (1 - \cos \theta_4 \cos \psi_4) + \ell_{2E} \cos \theta_2 \sin \psi_2) + \\
& + c_{y6} \ell_{4D} \cos \theta_4 \cos \psi_4 (y_4 - y_2 - \ell_{4D} \cos \theta_4 \sin \psi_4 - \ell_{2E} (1 - \cos \theta_2 \cos \psi_2)) - \\
& - c_{x9} h_4 (\sin \varphi_4 \cos \psi_4 - \cos \varphi_4 \sin \theta_4 \sin \psi_4) (x_4 - x_3 - \ell_{3T} \cos \theta_3 \sin \psi_3 - \\
& - h_4 (\cos \varphi_4 \cos \psi_4 \sin \theta_4 + \sin \varphi_4 \sin \psi_4)) + \\
& + c_{y9} h_4 (\cos \varphi_4 \cos \psi_4 \sin \theta_4 + \sin \varphi_4 \sin \psi_4) (y_4 - y_3 - \ell_{3T} (1 - \cos \theta_3 \cos \psi_3) + \\
& + h_4 (\cos \varphi_4 \sin \theta_4 \sin \psi_4 - \cos \psi_4 \sin \varphi_4)) + \\
& + c_{y11} (\ell_{FS1} \cos \theta_4 \cos \psi_4 + h_4 (\cos \varphi_4 \cos \psi_4 \sin \theta_4 + \sin \varphi_4 \sin \psi_4)) \\
& (y_4 - y_3 - \ell_{3T} (1 - \cos \theta_3 \cos \psi_3) + \ell_{FS1} \cos \theta_4 \sin \psi_4 + h_4 (\cos \varphi_4 \sin \theta_4 \sin \psi_4 - \\
& - \cos \psi_4 \sin \varphi_4)) + \\
& + c_{y12} (h_4 (\cos \varphi_4 \cos \psi_4 \sin \theta_4 + \sin \varphi_4 \sin \psi_4) - \ell_{FS2} \cos \theta_4 \cos \psi_4) \\
& (y_4 - y_3 - \ell_{3T} (1 - \cos \theta_3 \cos \psi_3) - \ell_{FS2} \cos \theta_4 \sin \psi_4 + h_4 (\cos \varphi_4 \sin \theta_4 \sin \psi_4 - \\
& - \cos \psi_4 \sin \varphi_4)) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + c_{z11}(\ell_{FS1} \cos \theta_4 \sin \psi_4 + h_4(\cos \psi_4 \sin \varphi_4 - \cos \varphi_4 \sin \theta_4 \sin \psi_4))(h_4(1 - \\
& - \cos \theta_4 \cos \varphi_4) + \ell_{FS1}(1 - \cos \theta_4 \cos \psi_4) + \ell_{3T} \sin \theta_3 - \ell_{FS1} \sin \theta_4 + \ell_{3T} \cos \theta_3 \sin \psi_3 + \\
& + h_4(\cos \varphi_4 \cos \psi_4 \sin \theta_4 + \sin \varphi_4 \sin \psi_4) + x_3 - x_4 - z_3 + z_4) + \\
& + c_{z12}(\ell_{FS2} \cos \theta_4 \sin \psi_4 - h_4(\cos \psi_4 \sin \varphi_4 - \cos \varphi_4 \sin \theta_4 \sin \psi_4))(h_4(1 - \cos \theta_4 \cos \varphi_4) + \\
& + \ell_{FS2}(1 - \cos \theta_4 \cos \psi_4) + \ell_{3T} \sin \theta_3 + \ell_{FS2} \sin \theta_4 - \ell_{3T} \cos \theta_3 \sin \psi_3 - \\
& - h_4(\cos \varphi_4 \cos \psi_4 \sin \theta_4 + \sin \varphi_4 \sin \psi_4) - x_3 + x_4 - z_3 + z_4) - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_5)\psi_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_4} = & -c_{x5} \ell_{4B} \cos \psi_4 \sin \theta_4 (x_4 - x_1 - \ell_{4B}(1 - \cos \theta_4 \cos \psi_4) - \ell_{1A} \cos \theta_1 \sin \psi_1) - \\
& - c_{x6} \ell_{4D} \cos \psi_4 \sin \theta_4 (x_2 - x_4 - \ell_{4D}(1 - \cos \theta_4 \cos \psi_4) + \ell_{2E} \cos \theta_2 \sin \psi_2) - \\
& - c_{y5} \ell_{4B} \sin \theta_4 \sin \psi_4 (y_4 - y_1 - \ell_{1A}(1 - \cos \theta_1 \cos \psi_1) + \ell_{4B} \cos \theta_4 \sin \psi_4) - \\
& - c_{y6} \ell_{4D} \sin \theta_4 \sin \psi_4 (y_4 - y_2 - \ell_{2E}(1 - \cos \theta_2 \cos \psi_2) - \ell_{4D} \cos \theta_4 \sin \psi_4) - \\
& - c_{x9} h_4 \cos \varphi_4 \cos \psi_4 \cos \theta_4 (x_4 - x_3 - \ell_{3T} \cos \theta_3 \sin \psi_3 - \\
& - h_4(\cos \varphi_4 \cos \psi_4 \sin \theta_4 + \sin \varphi_4 \sin \psi_4)) + \\
& + c_{y9} h_4 \cos \theta_4 \cos \varphi_4 \sin \psi_4 (y_4 - y_3 - \ell_{3T}(1 - \cos \theta_3 \cos \psi_3) + \\
& + h_4(\cos \varphi_4 \sin \theta_4 \sin \psi_4 - \cos \psi_4 \sin \varphi_4)) + \\
& + c_{z9} h_4 \cos \varphi_4 \sin \theta_4 (h_4(1 - \cos \theta_4 \cos \varphi_4) + \ell_{3T} \sin \theta_3 - z_3 + z_4) + \\
& + c_{z5} \ell_{4B} \cos \theta_4 (z_1 - z_4 - \ell_{1A} \sin \theta_1 + \ell_{4B} \sin \theta_4) - \\
& - c_{z6} \ell_{4D} \cos \theta_4 (z_2 - z_4 - \ell_{2E} \sin \theta_2 - \ell_{4D} \sin \theta_4) + \\
& + c_{y11} (h_4 \cos \theta_4 \cos \varphi_4 \sin \psi_4 - \ell_{FS1} \sin \theta_4 \sin \psi_4) \\
& (y_4 - y_3 - \ell_{3T}(1 - \cos \theta_3 \cos \psi_3) + \ell_{FS1} \cos \theta_4 \sin \psi_4 + h_4(\cos \varphi_4 \sin \theta_4 \sin \psi_4 - \\
& - \cos \psi_4 \sin \varphi_4)) + \\
& + c_{y12} (h_4 \cos \theta_4 \cos \varphi_4 \sin \psi_4 + \ell_{FS2} \sin \theta_4 \sin \psi_4) \\
& (y_4 - y_3 - \ell_{3T}(1 - \cos \theta_3 \cos \psi_3) - \ell_{FS2} \cos \theta_4 \sin \psi_4 + h_4(\cos \varphi_4 \sin \theta_4 \sin \psi_4 - \\
& - \cos \psi_4 \sin \varphi_4)) + \\
& + c_{z11} (-\ell_{FS1} \cos \theta_4 + h_4(\cos \theta_4 \cos \varphi_4 \cos \psi_4 + \cos \varphi_4 \sin \theta_4) + \\
& + \ell_{FS1} \cos \psi_4 \sin \theta_4)(h_4(1 - \cos \theta_4 \cos \varphi_4) + \ell_{FS1}(1 - \cos \theta_4 \cos \psi_4) + \ell_{3T} \sin \theta_3 - \\
& - \ell_{FS1} \sin \theta_4 + \ell_{3T} \cos \theta_3 \sin \psi_3 + h_4(\cos \varphi_4 \cos \psi_4 \sin \theta_4 + \sin \varphi_4 \sin \psi_4) + x_3 - x_4 - \\
& - z_3 + z_4) + c_{z12} (\ell_{FS2} \cos \theta_4 - h_4(\cos \theta_4 \cos \varphi_4 \cos \psi_4 + \cos \varphi_4 \sin \theta_4) + \\
& + \ell_{FS2} \cos \psi_4 \sin \theta_4)(h_4(1 - \cos \theta_4 \cos \varphi_4) + \ell_{FS2}(1 - \cos \theta_4 \cos \psi_4) + \ell_{3T} \sin \theta_3 + \\
& + \ell_{FS2} \sin \theta_4 + \ell_{3T} \cos \theta_3 \sin \psi_3 - h_4(\cos \varphi_4 \cos \psi_4 \sin \theta_4 + \sin \varphi_4 \sin \psi_4) - \\
& - x_3 + x_4 - z_3 + z_4)
\end{aligned}$$

### 3.5 Определение работы сил трения и диссипации

В любой реальной механической системе в случае возникновения колебаний происходит рассеивание энергии системы. Оно происходит в результате совершения работы силами диссипации. Диссипация механической энергии обусловлена тем, что в результате взаимных перемещений возникают силы трения, происходит деформация самих тел системы, преодолевается сопротивление среды. Суть диссипации – преобразование механической энергии в тепловую, и некоторые другие виды энергии. Рассеивание энергии происходит в демпферах, основными моделями которых являются гидравлический демпфер и демпфер сухого трения.

#### 3.5.1 Модель гидравлического демпфера

При изучении колебаний рельсового пути совместно с подрельсовым основанием принято заменять сложную многомассовую модель в виде балки на дискретном вязко-упругом основании простой упруго-демпфирующей моделью с демпфером вязкого трения. В этом случае величина сил сопротивления пропорциональна скорости деформации упругого элемента. Обозначим коэффициент вязкого трения как  $k_v$ . Тогда элементарная возможная работа сил сопротивления будет равна:

$$\delta A_c = k_v (\dot{\gamma} - \dot{z}) \delta z - k_v (\dot{\gamma} - \dot{z}) \delta \gamma, \quad (3.30)$$

где:  $\gamma$  – координата вертикальной неровности рельсового пути, приведенная к абсолютно жесткому подрельсовому основанию,  $z$  – координата точки взаимодействия колеса с рельсовым путем.

Модели демпферов вязкого трения будем использовать в элементах взаимодействия колес и рельсового пути, а также в узлах крепления бучс.

Запишем значение возможной работы для диссипативных элементов:

$$\begin{aligned}
 \delta A_{y1} &= k_{\text{vy}1}(\dot{\beta}_1 - \dot{y}_{A'})(\delta y_{A'} - \delta \beta_1), & \delta A_{z1} &= k_{\text{vz}1}(\dot{\gamma}_1 - \dot{z}_{A'})(\delta z_{A'} - \delta \gamma_1) \\
 \delta A_{y2} &= k_{\text{vy}2}(\dot{\beta}_2 - \dot{y}_{E'}) (\delta y_{E'} - \delta \beta_2), & \delta A_{z2} &= k_{\text{vz}2}(\dot{\gamma}_2 - \dot{z}_{E'}) (\delta z_{E'} - \delta \gamma_2) \\
 \delta A_{y3} &= k_{\text{vy}3}(\dot{\beta}_3 - \dot{y}_{K'}) (\delta y_{K'} - \delta \beta_3), & \delta A_{z3} &= k_{\text{vz}3}(\dot{\gamma}_3 - \dot{z}_{K'}) (\delta z_{K'} - \delta \gamma_3) \\
 \delta A_{y4} &= k_{\text{vy}4}(\dot{\beta}_4 - \dot{y}_{Q'}) (\delta y_{Q'} - \delta \beta_4), & \delta A_{z4} &= k_{\text{vz}4}(\dot{\gamma}_4 - \dot{z}_{Q'}) (\delta z_{Q'} - \delta \gamma_4) \\
 \\
 \delta A_{x5} &= k_{\text{vx}5}(\dot{x}_A - \dot{x}_B)(\delta x_B - \delta x_A) & \delta A_{x6} &= k_{\text{vx}6}(\dot{x}_E - \dot{x}_D)(\delta x_D - \delta x_E) \\
 \delta A_{y5} &= k_{\text{vy}5}(\dot{y}_A - \dot{y}_B)(\delta y_B - \delta y_A) & \delta A_{y6} &= k_{\text{vy}6}(\dot{y}_E - \dot{y}_D)(\delta y_D - \delta y_E) \quad (3.31) \\
 \delta A_{z5} &= k_{\text{vz}5}(\dot{z}_A - \dot{z}_B)(\delta z_B - \delta z_A) & \delta A_{z6} &= k_{\text{vz}6}(\dot{z}_E - \dot{z}_D)(\delta z_D - \delta z_E) \\
 \\
 \delta A_{x7} &= k_{\text{vx}7}(\dot{x}_K - \dot{x}_L)(\delta x_L - \delta x_K) & \delta A_{x8} &= k_{\text{vx}8}(\dot{x}_Q - \dot{x}_N)(\delta x_N - \delta x_Q) \\
 \delta A_{y7} &= k_{\text{vy}7}(\dot{y}_K - \dot{y}_L)(\delta y_L - \delta y_K) & \delta A_{y8} &= k_{\text{vy}8}(\dot{y}_Q - \dot{y}_N)(\delta y_N - \delta y_Q) \\
 \delta A_{z7} &= k_{\text{vz}7}(\dot{z}_K - \dot{z}_L)(\delta z_L - \delta z_K) & \delta A_{z8} &= k_{\text{vz}8}(\dot{z}_Q - \dot{z}_N)(\delta z_N - \delta z_Q).
 \end{aligned}$$

Вариацию перемещений характерных точек находим аналогично вариации обобщенных координат используя частные производные от функций (3.11 – 3.23).

Для остальных диссипативных элементов выражения работы получены аналогичным образом.

Для составления дифференциальных уравнений движения системы, необходимо выполнить варьирование выражения работы всех внутренних и внешних сил по обобщенным координатам, т.е. найти приращение работы на виртуальном перемещении вдоль обобщенной координаты  $\frac{\delta A}{\delta q_i}$ . Результаты варьирования включены в уравнения движения (Приложение А).

### 3.5.2 Модель фрикционного клинового гасителя колебаний

В тележке мод. 18-100 в качестве основного демпфера колебаний применяется фрикционный клиновой гаситель колебаний, в котором рассеивание кинетической энергии происходит за счет сил сухого трения. Как известно, в упрощенном случае, сила трения принимается пропорционально равной силе нормального давления между трущимися поверхностями. Коэффициент пропорциональности носит название коэффициента сухого трения. Необходимо различать силу трения покоя и трение скольжения. Вектор силы трения покоя направлен противоположно продольной силе внешнего воздействия и уравнивает ее до тех пор, пока не будет превышена величина предельного значения силы трения покоя. В этом случае начинается относительное перемещение трущихся поверхностей – скольжение. Направление силы трения скольжения противоположно вектору скорости относительного перемещения поверхностей.

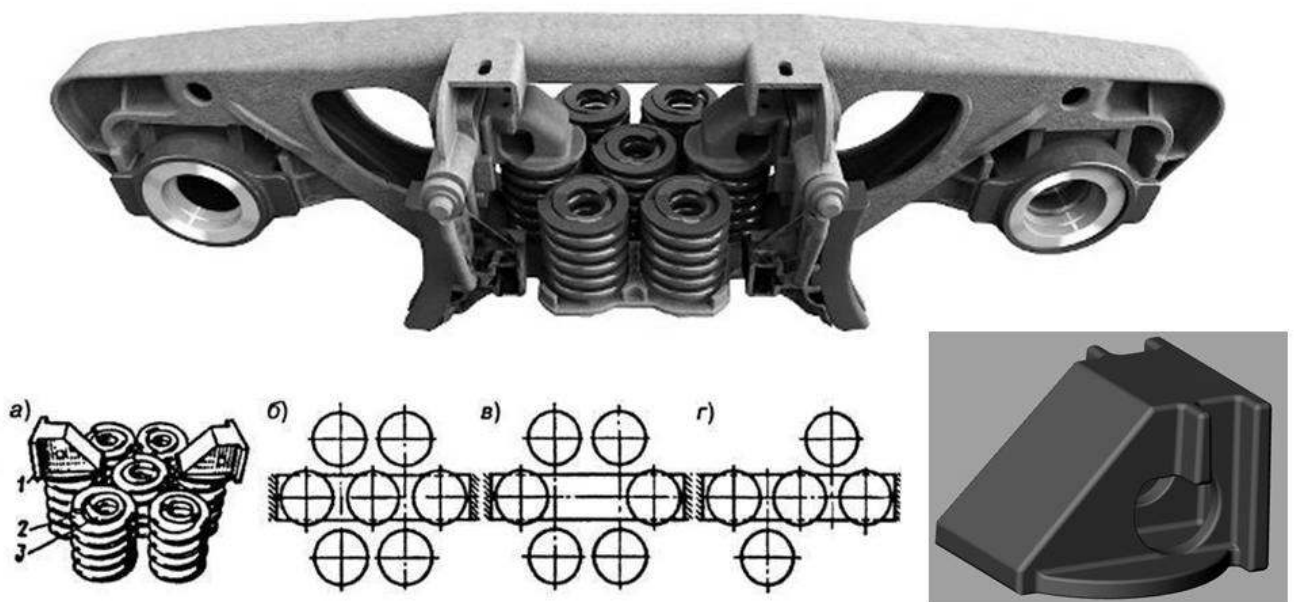


Рисунок 3.4 – Устройство фрикционного клинового гасителя колебаний.

1 – фрикционный клин, 2 – наружная пружина, 3 – внутренняя пружина

Подробное рассмотрение различных режимов трения приведено в [25, 82, 105, 108, 109, 119]. В данной работе будет использована модель гасителя без фазы пластического трения, т.е. только с кулоновым трением.

Рассмотрим плоскую модель фрикционного клинового гасителя колебаний (рисунок 3.5). На плоскости  $xOz$  клин имеет только одну степень свободы – подвижность вдоль направляющей фрикционной планки. Это движение может быть вызвано как взаимными вертикальными перемещениями боковины и наддресорной балки, так и их продольными перемещениями.

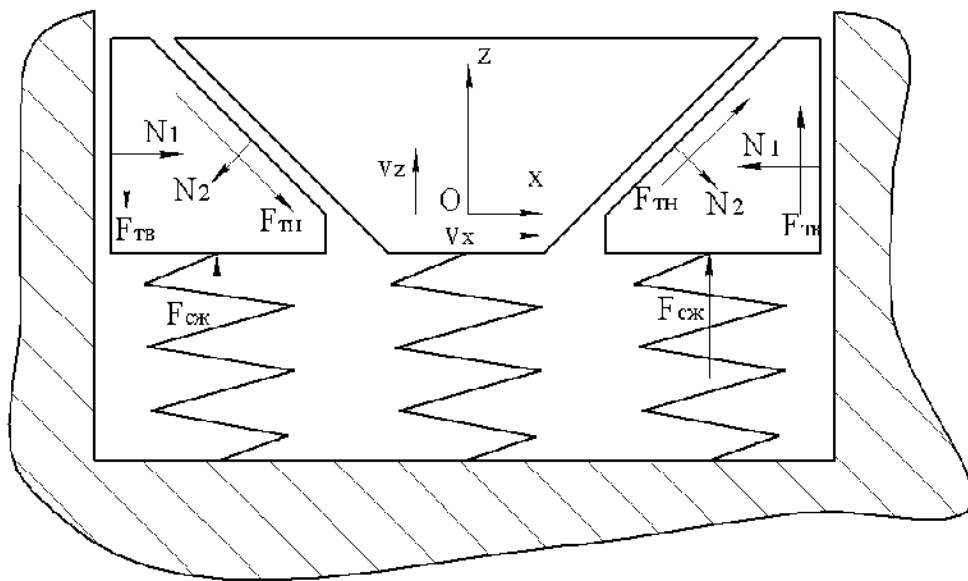


Рисунок 3.5 – Расчётная схема фрикционного клинового гасителя колебаний

Клин имеет две поверхности трения – вертикальную, соприкасающуюся с фрикционной планкой, и наклонную, взаимодействующую с вырезом в наддресорной балке. Обозначим относительные перемещения поверхностей трения как  $s_{iv}$  и  $s_{in}$  соответственно для вертикальной и наклонной поверхностей  $i$ -го клина. Отметим, что с некоторым допущением, величину  $s_{iv}$  можно принять равной величине вертикальной деформации соответствующей подклиновой пружины (3.27), а величину  $s_{in}$  принять равной величине продольной деформации пружин основного рессорного комплекта соответствующей боковины (с учетом направления) (3.26), умноженной на  $\sqrt{2}$ , поскольку угол наклона поверхности

клина можно принять равным  $45^\circ$ . Так, например, силы трения по наклонной и вертикальной поверхности для первого клина будут равны:

$$\begin{aligned} F_{m\epsilon} &= N_1 \cdot \mu \cdot \text{sign}(\dot{s}_{1\epsilon}) \\ F_{m\eta} &= N_2 \cdot \mu \cdot \text{sign}(\dot{s}_{1\eta}) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Обозначим все действующие на клин силы и составим уравнения проекции всех сил на оси  $x$  и  $z$ . Весом и силой инерции клина можно пренебречь в связи с тем, что они не вносят существенного вклада в процесс силового взаимодействия.

$$\begin{aligned} \sum F_{xi} &= N_1 - \frac{N_2}{\sqrt{2}} + \frac{F_{m\eta}}{\sqrt{2}} \cdot \text{sign}(\dot{s}_{i\eta}) = N_1 - N_2 \frac{1}{\sqrt{2}} \mu_2 \cdot \text{sign}(\dot{s}_{i\eta}) = 0 \\ \sum F_{zi} &= F_{сж} - F_{m\epsilon} \cdot \text{sign}(\dot{s}_{\epsilon}) - \frac{F_{m\eta}}{\sqrt{2}} \text{sign}(\dot{s}_{\eta}) - \frac{N_2}{\sqrt{2}} = 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

Результатом работы фрикционного гасителя колебаний является совершаемая работа сил трения, элементарная работа при этом равна:

$$\begin{aligned} dA_1 &= -N_1 \cdot \mu_1 \cdot ds_{\epsilon} \\ dA_2 &= -N_2 \cdot \mu_2 \cdot ds_{\eta} \end{aligned} \quad (3.34)$$

В результате решения (3.33) и подстановки в (3.34) с учетом знаковой функции от относительной скорости перемещения трущихся поверхностей, а также принимая  $F_{сж} = c_z \cdot \Delta z$ , где  $\Delta z$  вычислено в (3.27) для соответствующих подклиновых пружин, получаем значение работы сил трения для одного заднего клина:

$$\begin{aligned} dA_{\epsilon} &= \frac{c_z \cdot \Delta z \cdot (\mu_1 - \mu_1 \mu_2 \cdot \text{sign}(\dot{s}_{\eta}))}{1 + \mu_1 \text{sign}(\dot{s}_{\epsilon}) + \mu_2 \text{sign}(\dot{s}_{\eta}) - \mu_1 \mu_2 \text{sign}(\dot{s}_{\eta}) \text{sign}(\dot{s}_{\epsilon})} ds_{\epsilon} \\ dA_{\eta} &= \frac{c_z \cdot \Delta z \cdot \mu_2 \sqrt{2}}{1 + \mu_1 \text{sign}(\dot{s}_{\epsilon}) + \mu_2 \text{sign}(\dot{s}_{\eta}) - \mu_1 \mu_2 \text{sign}(\dot{s}_{\eta}) \text{sign}(\dot{s}_{\epsilon})} ds_{\eta} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Те же выкладки для переднего клина будут отличаться знаками перед некоторыми членами:

$$dA_g = \frac{c_z \cdot \Delta z \cdot (\mu_1 + \mu_1 \mu_2 \cdot \text{sign}(\dot{s}_H))}{1 - \mu_1 \text{sign}(\dot{s}_g) - \mu_2 \text{sign}(\dot{s}_H) - \mu_1 \mu_2 \text{sign}(\dot{s}_H) \text{sign}(\dot{s}_g)} ds_g \quad (3.36)$$

$$dA_H = \frac{c_z \cdot \Delta z \mu_2 \sqrt{2}}{1 - \mu_1 \text{sign}(\dot{s}_g) - \mu_2 \text{sign}(\dot{s}_H) - \mu_1 \mu_2 \text{sign}(\dot{s}_H) \text{sign}(\dot{s}_g)} ds_H$$

Варьируя работу (3.35) и (3.36) для соответствующих клиньев по обобщенным координатам, получаем обобщенные силы сопротивления, участвующие в процессе гашения вертикальных колебаний. Полученные значения обобщенной силы были введены в систему дифференциальных уравнений Лагранжа II рода. После подстановки, систему дифференциальных уравнений можно считать завершённой. Полный вид системы уравнений приведён в Приложении А в составе листинга программы расчёта динамики тележки. Решение этой системы осуществляется численными методами в следующей главе.



## **4 ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ**

Разработан алгоритм и программа численного расчёта системы дифференциальных уравнений Лагранжа второго рода, моделирующих движение звеньев тележки грузового вагона.

Проведенное исследование прохождения детерминированной вертикальной неровности показало, что, с увеличением скорости движения железнодорожного экипажа, отклонение фазовой траектории от невозмущённой растёт и существенно отличается от полученной без учёта гироскопических свойств вращающейся колёсной пары.

Практическая значимость разработанной модели заключается в возможности использования программы для численных расчётов в целях совершенствования конструкции тележки. Так, например, было проведено сравнение влияния на вертикальную динамику кузова вагона фрикционного аппарата с измененными характеристиками.

Программа и методика расчёта динамики тележки грузового вагона внедрена в производственную деятельность ОАО «УКБВ», а также в учебный процесс на кафедре «Вагоны» СамГУПС. Акты о внедрении приведены в Приложении Б.

### **4.1 Краткое описание модели и вычислительного процесса**

Полученная система нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, описывающая поведение системы при различных возмущениях с учетом гироскопических свойств колесных пар, является сложной нелинейной неоднородной системой 30-ти дифференциальных уравнений второго порядка. Точное аналитическое решение такой системы не представляется возможным, поэтому для решения уравнений движения элементов тележки были использованы численные методы, реализация которых возможна с применением

различных пакетов математических прикладных программ для ЭВМ. В предложенной работе был использован программный пакет компьютерной алгебры Mathematica, позволивший получить решение указанной системы дифференциальных уравнений численными методами. Листинг составленной программы с примером результатов расчёта приведен в приложении А.

Использование математических программных пакетов сторонних разработчиков накладывает ряд ограничений на возможности работы с математической моделью, обусловленной необходимостью соблюдать синтаксис оболочки. Лучшим вариантом могло быть создание программного комплекса, основанного на известных численных методах, однако в данной работе таких задач не ставилось.

Для работы программы необходимо однозначное задание начальных условий интегрирования, а также ряда констант, являющихся характеристиками тележки. К ним относятся:

- геометрические размеры всех звеньев;
- массовые характеристики звеньев, а также инерционные характеристики звеньев относительно главных осей симметрии, являющихся осями подвижных систем координат, связанных с телом;
- координаты центров масс тел относительно связанных с телом систем координат (для учета дополнительного момента инерции, когда ось вращения не совпадает с главными осями тела);
- параметры жесткости и коэффициенты демпфирования упруго-демпфирующих элементов, а также коэффициенты сопротивления повороту отдельных звеньев;
- коэффициенты трения для каждой пары трения в клиновом фрикционном гасителе колебаний;
- задание функции неровностей пути как в профиле, так и в плане.

Числовые значения фиксированных параметров модели и диапазоны значений изменяемых параметров приведены в таблице 4.1

Таблица 4.1 - Исходные данные

Наименование параметра	Условное обозначение	Численное значение (диапазон значений)	Единица измерения
Скорость движения ПС	$v$	[0...40]	м/с
Длина моделируемого участка пути	$s$	[10...500]	м
Масса колёсных пар	$m_{\{1,2\}}$	1400	кг
Момент инерции колёсной пары относительно оси $\xi$	$I_{\xi\{1,2\}}$	825	кг·м <sup>2</sup>
Момент инерции колёсной пары относительно оси $\eta$	$I_{\eta\{1,2\}}$	115	кг·м <sup>2</sup>
Момент инерции колёсной пары относительно оси $\zeta$	$I_{\zeta\{1,2\}}$	825	кг·м <sup>2</sup>
Масса, приведённая к надрессорной балке	$m_3$	[1...5]·10 <sup>4</sup>	кг
Момент инерции надрессорной балки с присоединённой частью кузова относительно оси $\xi$	$I_{\xi 3}$	[5...10]·10 <sup>4</sup>	кг·м <sup>2</sup>
Момент инерции надрессорной балки с присоединённой частью кузова относительно оси $\eta$	$I_{\eta 3}$	[5...10]·10 <sup>4</sup>	кг·м <sup>2</sup>
Момент инерции надрессорной балки с присоединённой частью кузова относительно оси $\zeta$	$I_{\zeta 3}$	[5...10]·10 <sup>4</sup>	кг·м <sup>2</sup>
Масса левой боковой рамы	$m_{\{4,5\}}$	500	кг
Момент инерции левой боковой рамы относительно оси $\xi$	$I_{\xi\{4,5\}}$	150	кг·м <sup>2</sup>
Момент инерции левой боковой рамы относительно оси $\eta$	$I_{\eta\{4,5\}}$	25	кг·м <sup>2</sup>
Момент инерции левой боковой рамы относительно оси $\zeta$	$I_{\zeta\{4,5\}}$	160	кг·м <sup>2</sup>

Таблица 4.2 - Геометрические параметры тележки в соответствии с расчётной схемой

1	2	3	4
Наименование параметра	Условное обозначение	Численное значение (диапазон значений)	Единица измерения
Расстояние от центра колесной пары 1 до правой буксы	$l_{1A}$	0.9	м
Расстояние от центра колесной пары 1 до правого переднего колеса	$l_{1A'}$	0.76	м
Расстояние от центра колесной пары 1 до левой буксы	$l_{1Q}$	0.9	м
Расстояние от центра колесной пары 1 до левого переднего колеса	$l_{1Q'}$	0.76	м
Расстояние от центра колесной пары 2 до правой буксы	$l_{2E}$	0.9	м
Расстояние от центра колесной пары 2 до правого заднего колеса	$l_{2E'}$	0.76	м
Расстояние от центра колесной пары 2 до левой буксы	$l_{2K}$	0.9	м
Расстояние от центра колесной пары 2 до левого заднего колеса	$l_{2K'}$	0.76	м
Расстояние от центра наддрессорной балки до правого рессорного комплекта	$l_{3T}$	0.5	м
Расстояние от центра наддрессорной балки до левого рессорного комплекта	$l_{3U}$	0.5	м
Расстояние от центра правой боковины до передней буксы	$l_{4B}$	1.12	м
Расстояние от центра правой боковины до задней буксы	$l_{4D}$	1.12	м
Расстояние от центра левой боковины до передней буксы	$l_{5N}$	1.12	м
Расстояние от центра левой боковины до задней буксы	$l_{5L}$	1.12	м
Высота от центра правой боковины до опорной площадки рессорного комплекта	$h_4$	0.3	м

Продолжение таблицы 4.2

1	2	3	4
Высота от центра левой боковины до опорной площадки рессорного комплекта	$h_5$	0.3	м
Радиус поверхности катания переднего правого колеса	$R_A$	0.475	м
Радиус поверхности катания переднего левого колеса	$R_Q$	0.475	м
Радиус поверхности катания заднего правого колеса	$R_E$	0.475	м
Радиус поверхности катания заднего левого колеса	$R_K$	0.475	м

Таблица 4.3 - Характеристики упруго-демпфирующих элементов

Наименование параметра	Условное обозначение	Численное значение (диапазон значений)	Единица измерения
1	2	3	4
<b>Коэффициенты жёсткости</b>			
Жесткость контактного элемента «колесо-рельс» в продольном направлении	$c_{x1} - c_{x4}$	10	кН/м
Жесткость контактного элемента «колесо-рельс» в поперечном направлении	$c_{y1} - c_{y4}$	5	МН/м
Жесткость контактного элемента «колесо-рельс» в вертикальном направлении	$c_{z1} - c_{z4}$	50	МН/м
Жесткость элемента сопряжения колёсной пары и боковой рамы (буксовых адаптеров) в продольном направлении	$c_{x5} - c_{x8}$	10	МН/м
Жесткость элемента сопряжения колёсной пары и боковой рамы (буксовых адаптеров) в поперечном направлении	$c_{y5} - c_{y8}$	10	МН/м
Жесткость элемента сопряжения колёсной пары и боковой рамы (буксовых адаптеров) в вертикальном направлении	$c_{z5} - c_{z8}$	50	МН/м
Жесткости правого и левого основного рессорного комплекта в продольном направлении	$c_{x9}, c_{x10}$	3	МН/м

Продолжение таблицы 4.3

1	2	3	4
Жесткости правого и левого основного рессорного комплекта в поперечном направлении	$c_{y9}, c_{y10}$	3	МН/м
Жесткости правого и левого основного рессорного комплекта в вертикальном направлении	$c_{z9}, c_{z10}$	3	МН/м
Коэффициенты сухого и вязкого трения			
Коэффициент вязкого трения в точке контакта «колесо-рельс»	$k_{y1} - k_{y4}$	20	кН·с/м
	$k_{z1} - k_{z4}$	50	кН·с/м
Коэффициент вязкого трения в узле соединения боковой рамы и оси колёсной пары	$k_{x12} - k_{x42}$	10	кН·с/м
	$k_{y12} - k_{y42}$	10	кН·с/м
	$k_{z12} - k_{z42}$	10	кН·с/м
Коэффициент сухого трения	$\mu_1 - \mu_8$	0,1-0,2	-

Неровности пути при одиночной просадке на правом рельсе длиной 10 м и амплитудой 5мм задаются функциями:

$$\gamma_1[t] = \text{If}\{ t < 10 / v \} \text{ then: } - 0,0025 \cdot (\text{Cos}[2 \pi \cdot v \cdot t / 10 - \pi] + 1), \text{ else: } 0\}$$

$$\gamma_2[t] = \text{If}\{ (l_{4B} + l_{4D}) / v < t < (10 + l_{c4,b} + l_{c4,d}) / v \} \text{ then: } -0,0025 \cdot (\text{Cos}[2 \cdot \pi \cdot v \cdot (t - (l_{4B} + l_{4D}) / v) / 10 - \pi] + 1), \text{ else: } 0\}$$

$$\gamma_3[t] = 0$$

$$\gamma_4[t] = 0$$

где  $\gamma_1$  – вертикальная неровность под передним правым колесом,

$\gamma_2$  – вертикальная неровность под задним правым колесом,

$\gamma_3$  – вертикальная неровность под задним левым колесом,

$\gamma_4$  – вертикальная неровность под передним левым колесом,

Необходимо отметить, что в разработанной модели применена упрощенная модель взаимодействия колесной пары и рельсового пути – рельс вместе с основанием заменен некоторым абсолютно жестким псевдостержнем – направляющей фактического пути с его вертикальными и горизонтальными неровностями, с которым колесо взаимодействует через упруго-демпфирующие элементы, характеристики которых моделируют упруго-демпфирующие свойства

самого рельса, подрельсового основания и балласта вместе взятых. Кроме того, введением дополнительной неровности, как функции положения колесной пары, можно моделировать взаимодействие профиля колеса и рельса при их относительном перемещении.

Уравнения системы должны быть разрешены относительно одной из переменных старшего порядка, являющихся второй производной по времени от обобщенной координаты. Эта система преобразуется к 60-ти дифференциальным уравнениям первого порядка (преобразование к форме Коши).

Для численного интегрирования применен предлагаемый оболочкой метод Рунге-Кутты с адаптивным шагом, а также была включена опция переключения методов интегрирования при существенном повышении жёсткости решаемых уравнений. Очевидно, что возможно применение других методов, как с адаптивным, так и с фиксированным шагом, однако анализа влияния используемых методов на скорость и точность решения в рамках представленной работы не проводилось.

Результаты расчёта представлены в удобной форме в виде графиков колебаний, а также графиков изменения скорости и ускорения расчетных точек и их фазовых траекторий. Полученные результаты могут быть использованы как для оценки характеристик колебательного процесса, так и для оценки силовых факторов, возникающих в элементах сопряжения деталей конструкции.

Стандартным испытанием для различных образцов железнодорожной техники является её сброс с клиньев. Такое испытание позволяет выполнить первичную оценку эффективности рессорного подвешивания экипажа. Для нас этот момент важен тем, что позволяет сделать оценку адекватности построенной математической модели и приступить к дальнейшим исследованиям. Для моделирования сброса с клиньев достаточно придать начальную вертикальную скорость всем телам исследуемой механической системы, соответствующую высоте сброса, а статические прогибы упругих элементов задать равными нулю. Таким образом, в начале интервала численного интегрирования мы получаем момент столкновения тележки с рельсами. По результатам данных испытаний

можно судить об эффективности применяемых гасителей колебаний. Однако, учитывая то обстоятельство, что объект исследования не позволяет существенно менять конструкцию гасителей, в работе проводится оценка влияния различных параметров существующего гасителя, как то: изменение коэффициента трения материала по различным поверхностям гасителя, изменение жёсткости и усилия предварительного сжатия подклиновых пружин и пружин основного рессорного комплекта.

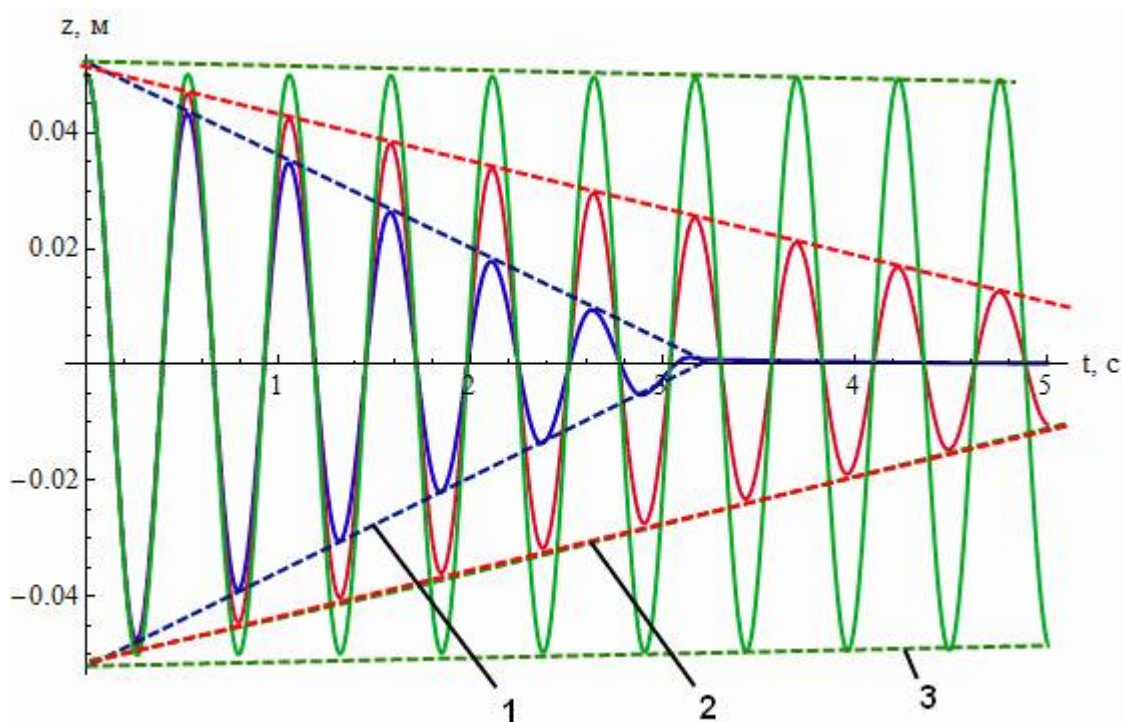


Рисунок 4.1 – График вертикальных колебаний  $z(t)$  центра масс надрессорной балки при различных значениях величины сухого трения: 1 - исправный клин, 2 - коэффициент трения поверхностей снижен на 50%, 3 - неисправный фрикционный гаситель (выпадение клина)

На рисунках 4.1 и 4.2 представлены графики зависимости интенсивности гашения колебаний от коэффициента трения и величины начальной деформации подклиновых пружин. Как видно из графиков, колебания кузова являются затухающими, огибающая колебаний представляет прямую линию, что соответствует работе сил сухого трения.



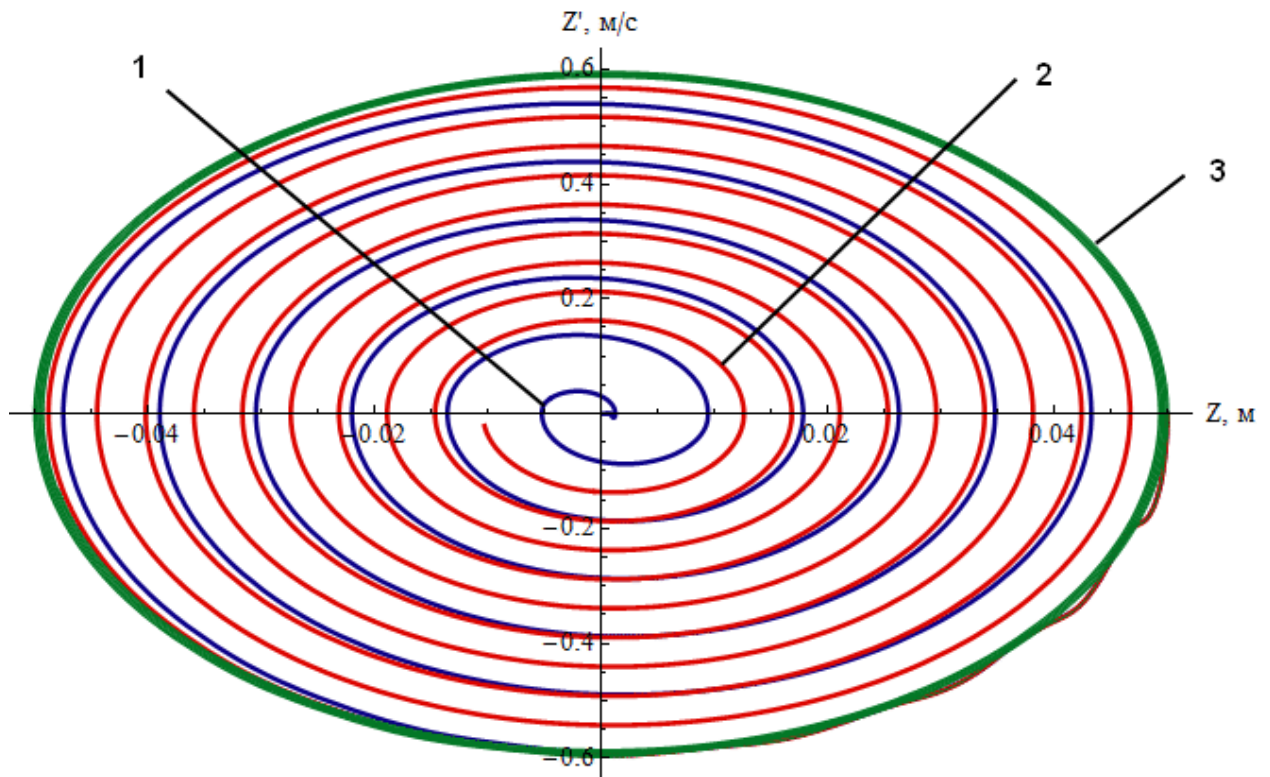


Рисунок 4.2 – Фазовая траектория вертикальных колебаний  $z'(z)$  центра масс надрессорной балки при различных значениях величины сухого трения: 1 - исправный клин, 2 - коэффициент трения поверхностей снижен на 50%, 3 - неисправный фрикционный гаситель (выпадение клина)

Это подтверждает правильность работы алгоритма предложенной модели динамики тележки. При неисправности фрикционного гасителя колебания поддерживаются в области предельного цикла. Несмотря на то, что модель позволяет задаться параметрами трения для каждой из поверхностей трения каждого клина, для оценки адекватности модели достаточно просчитать варианты с различной комбинацией этих параметров по вертикальным и наклонным поверхностям – значения  $\mu_1$  и  $\mu_2$  в выражениях (3.34) и (3.35), приняв их соответственно одинаковыми для всех клиньев.

## 4.2 Линеаризация модели и оценка сходимости решений

С целью сокращения машинного времени расчёта было принято решение о линеаризации дифференциальных уравнений движения тележки, полученных в главе 3. Предпосылкой к этому является то, что углы поворота звеньев тележки относительно центров масс малы. Это позволило разложить тригонометрические функции  $\sin$  и  $\cos$  в ряд Тейлора и отбросить все члены ряда старше второго. На рисунках 4.3-4.6 приведены графики, отражающие наибольшее отличие в расчетах по линеаризованной модели (графики под номером 1, синего цвета) и нелинеаризованной (графики под номером 2, красного цвета). По остальным графикам визуального отличия не наблюдается. Расчеты приведены для скорости движения 33 м/с при прохождении одиночной неровности рельсового пути амплитудой 5 мм.

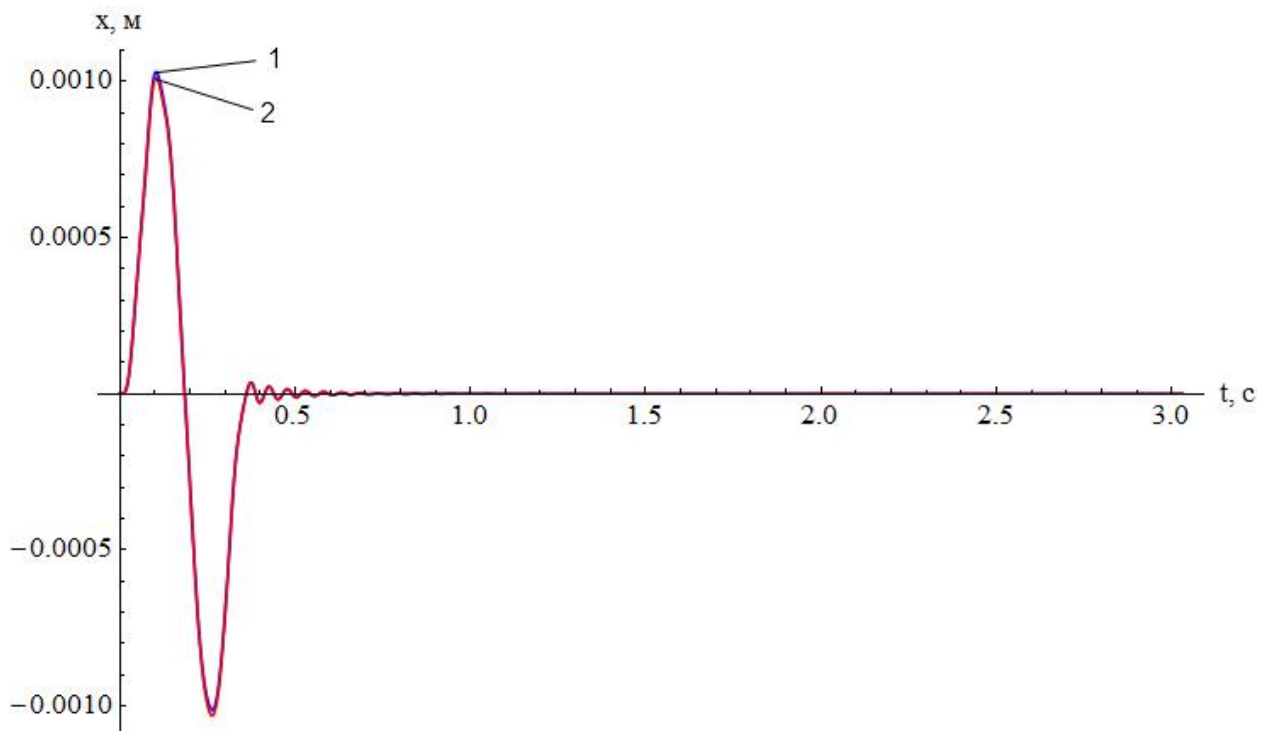


Рисунок 4.3 – Наложение графиков функций  $x(t)$  перемещения центра масс передней колёсной пары, полученных по нелинеаризованной (1) и линеаризованной (2) моделям

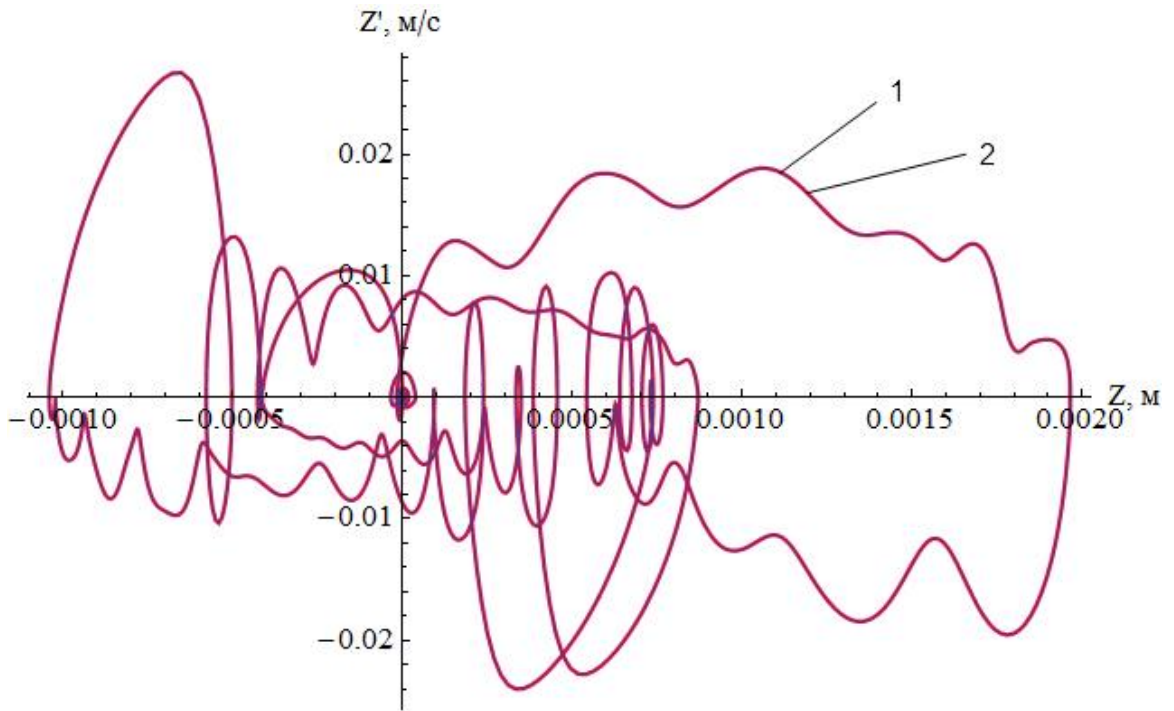


Рисунок 4.4 – Наложение графиков фазовых траекторий  $\dot{z}(z)$  перемещения центра масс левой боковой рамы, полученных по нелинеаризованной (1) и линеаризованной (2) моделям

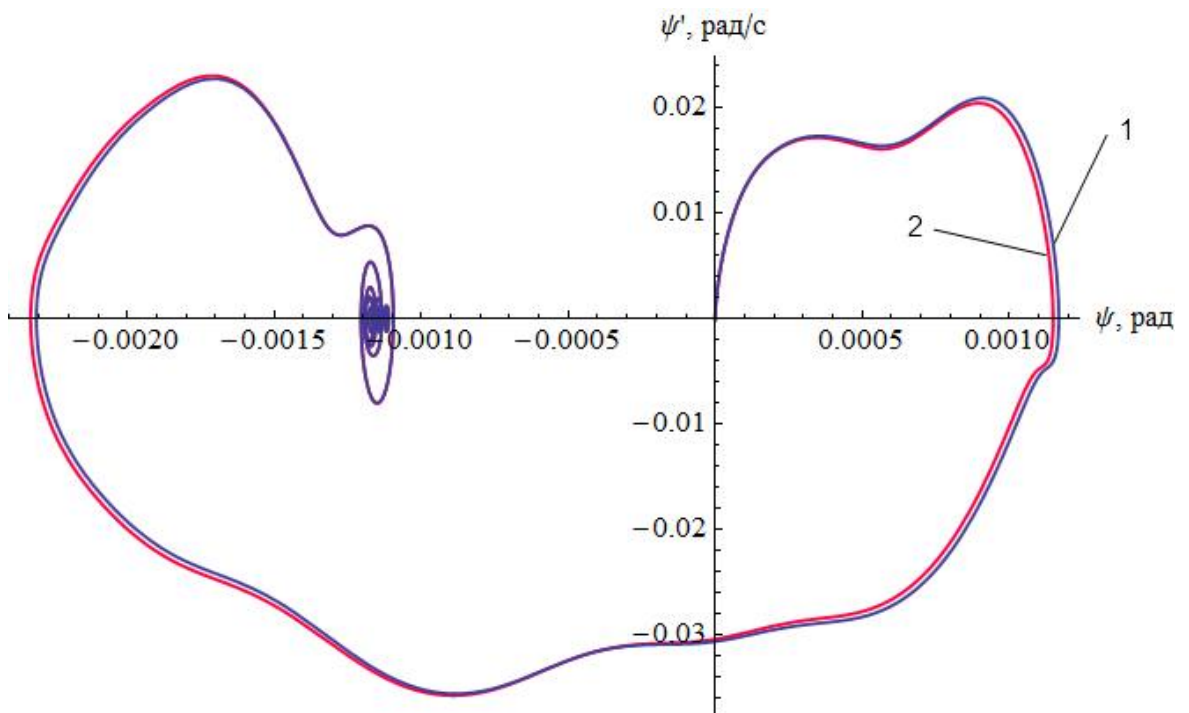


Рисунок 4.5 – Наложение графиков фазовых траекторий  $\dot{\psi}(\psi)$  угла виляния передней колёсной пары, полученных по нелинеаризованной (1) и линеаризованной (2) моделям

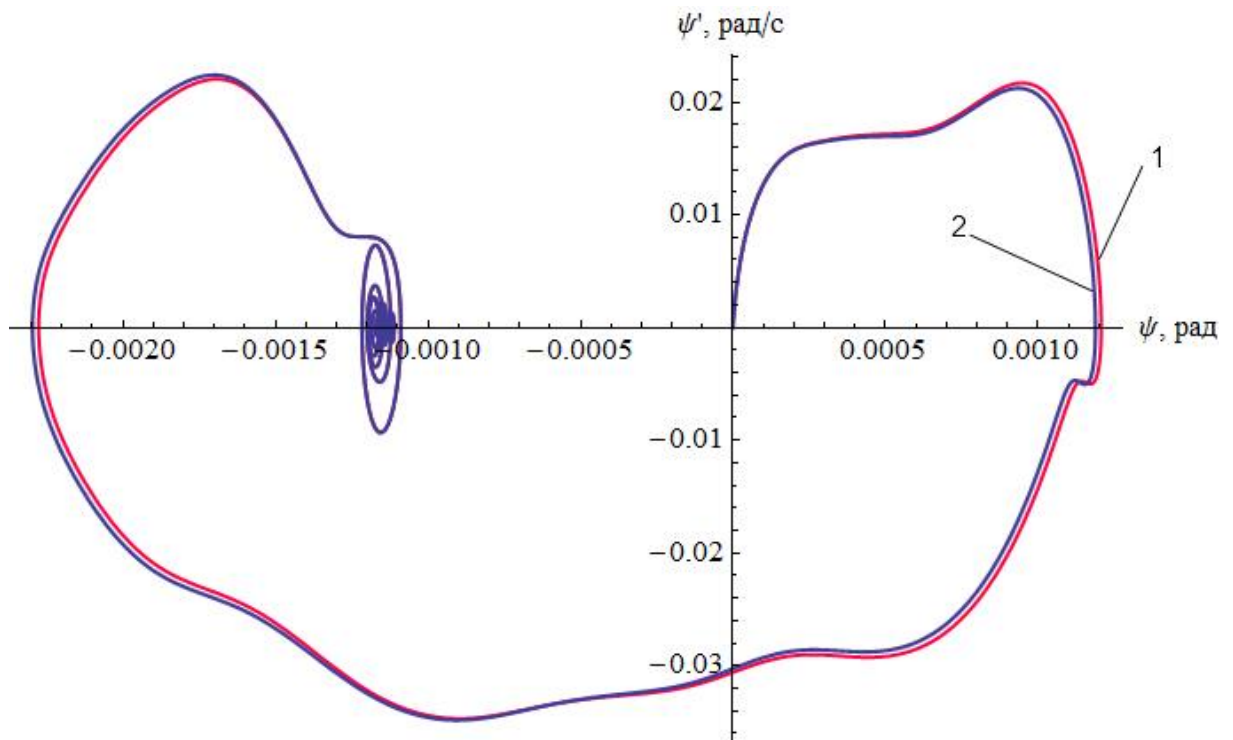


Рисунок 4.6 – Наложение графиков фазовых траекторий  $\dot{\psi}(\psi)$  угла виляния второй по ходу движения колёсной пары, полученных по нелинеаризованной (1) и линеаризованной (2) моделям

На рисунках 4.5 и 4.6 можно отметить проявление гироскопических свойств колёсных пар: при прохождении односторонней неровности возмущающий момент, действующий в вертикальной поперечной плоскости вызывает поворот колёсной пары вокруг вертикальной оси, вызывая её виляние.

Из сравнительного анализа результатов расчёта по полной и линеаризованной моделям можно сделать вывод, что линеаризация уравнений модели несущественно изменяет вид графиков процессов колебаний, не изменяя при этом качественных и количественных параметров колебательного процесса. Как показали сравнительные расчёты, погрешность составила не более 1-3%, а машинное время сократилось в 5-7 раз. Поэтому применение линеаризованной модели в дальнейших расчётах можно считать вполне обоснованным. Смещение полюса фазовой траектории на рисунках 4.5 и 4.6 вызвано воздействием гироскопических эффектов, представляет главное отличие представленной модели от разработанных ранее и проанализировано в следующих разделах представленной главы.

### 4.3 Оценка влияния гироскопического эффекта вращающихся колёсных пар на кинематические характеристики звеньев тележки

Исследования показали, что наибольшее влияние учёт вращения колёсных пар оказывает на углы и скорости влияния колёсных пар. Ниже приведены результаты расчетов для элементов тележки в виде фазовых траекторий, построенных с учетом вращения колесных пар (синие линии графиков 1) и без учета собственного вращения (красные линии графиков 2).

Расчет проводился для односторонней неровности на правом рельсе в виде просадки амплитудой 24мм и длиной волны 25м при скорости движения экипажа 33 м/с. Остальные параметры тележки приняты стандартными в соответствии с таблицами 4.1 - 4.3.

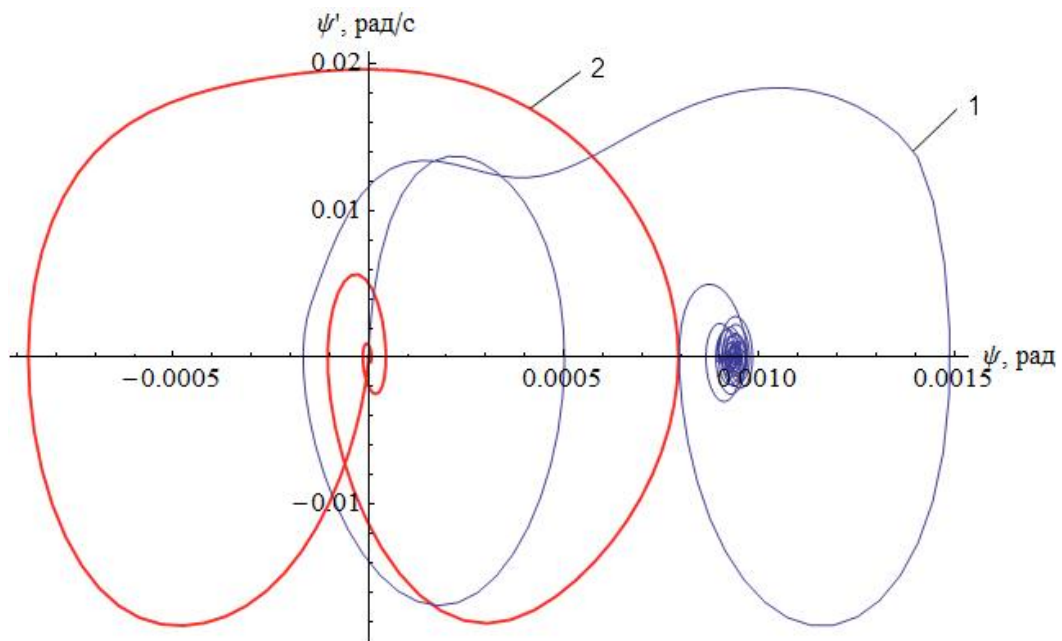


Рисунок 4.7 – Сравнение результатов расчета для угла влияния  $\psi(\psi)$  первой колёсной пары при учёте гироскопического эффекта (1) и без учёта (2)

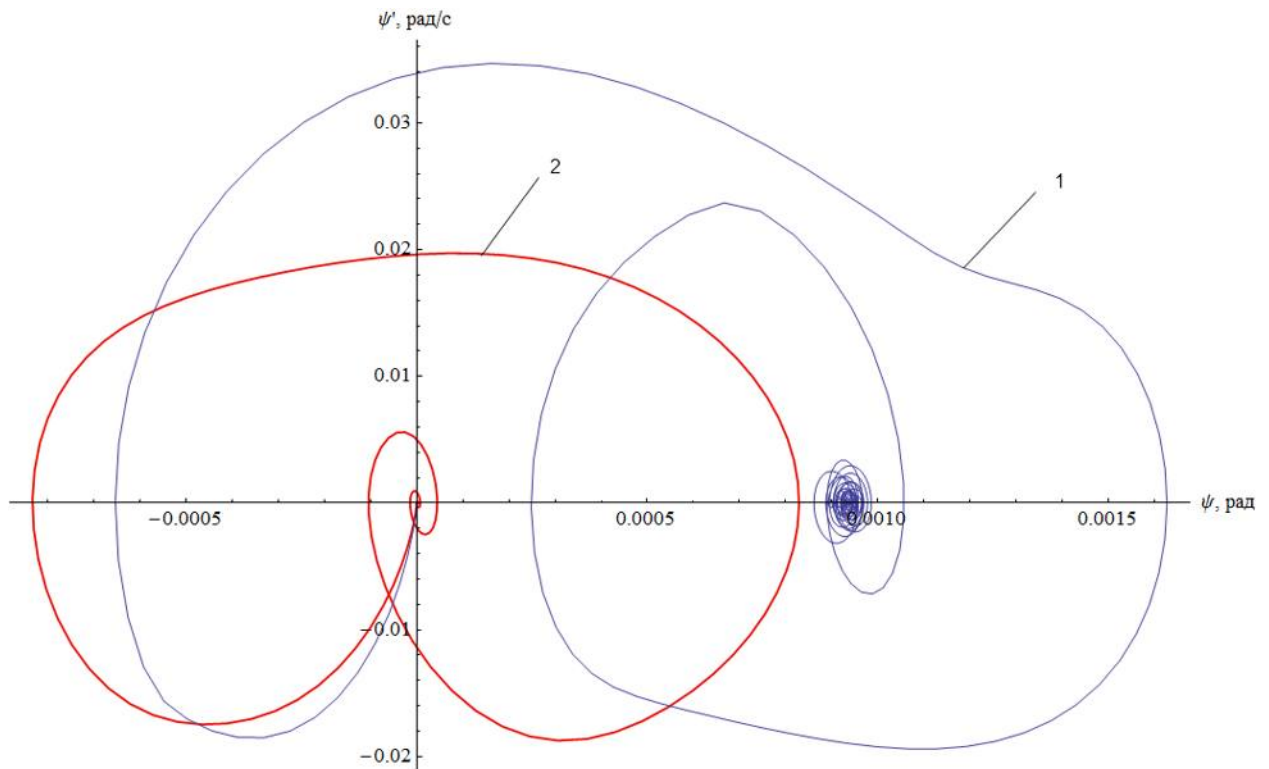


Рисунок 4.8 – Сравнение результатов расчета для угла виляния  $\psi(\psi)$  второй колёсной пары при учёте гироскопических эффектов (1) и без учёта (2)

Как было отмечено выше, наибольшее влияние моментов возмущающих сил, вызванных асимметричной неровностью пути в профиле, действующих в поперечной движению плоскости, сказывается на координатах виляния колёсных пар. Через упруго-демпфирующие связи звеньев тележки возмущающее воздействие передается на боковые рамы, а затем на надрессорную балку и кузов вагона. На рисунке 4.9 представлено различие фазовых траекторий угла виляния надрессорной балки при учёте и без учёта гироскопического эффекта.

На рисунках 4.10 и 4.11 представлены фазовые траектории изменения продольной координаты  $x$  правой и левой боковых рам. Как следует из расчётной схемы (см. рисунок 3.1), эти координаты напрямую связаны с углом виляния колёсных пар, так как их поворот вызывает забегание одной боковой рамы относительно другой.



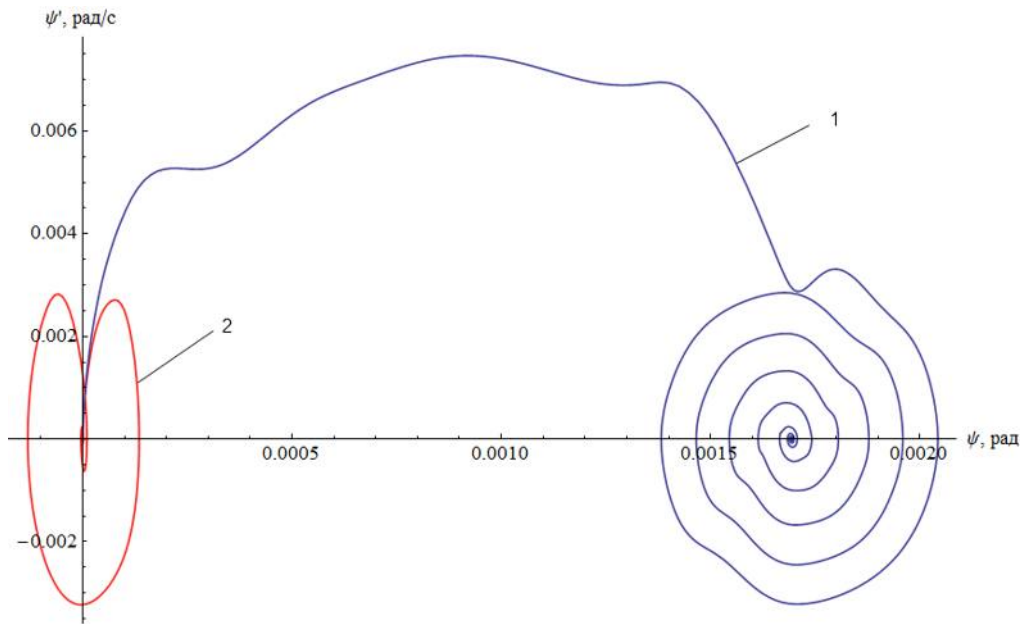


Рисунок 4.9 – Сравнение результатов расчета для угла виляния наддрессорной балки при учёте гироскопических эффектов от вращения колёсных пар (1) и без учёта (2)

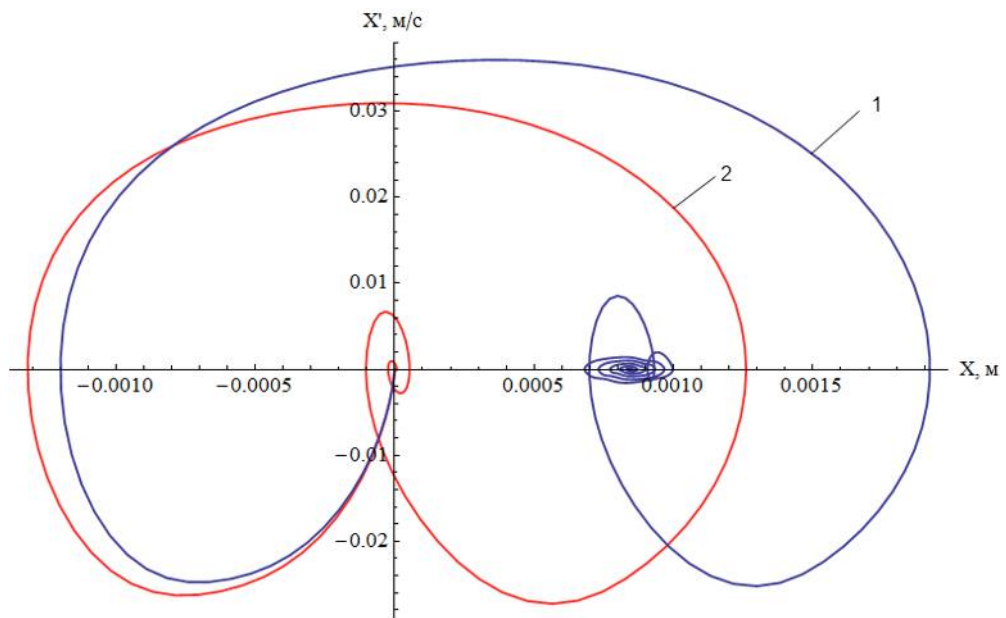


Рисунок 4.10 – Сравнение результатов расчета для забегания правой боковой рамы при учёте гироскопических эффектов от вращения колёсных пар (1) и без учёта (2)

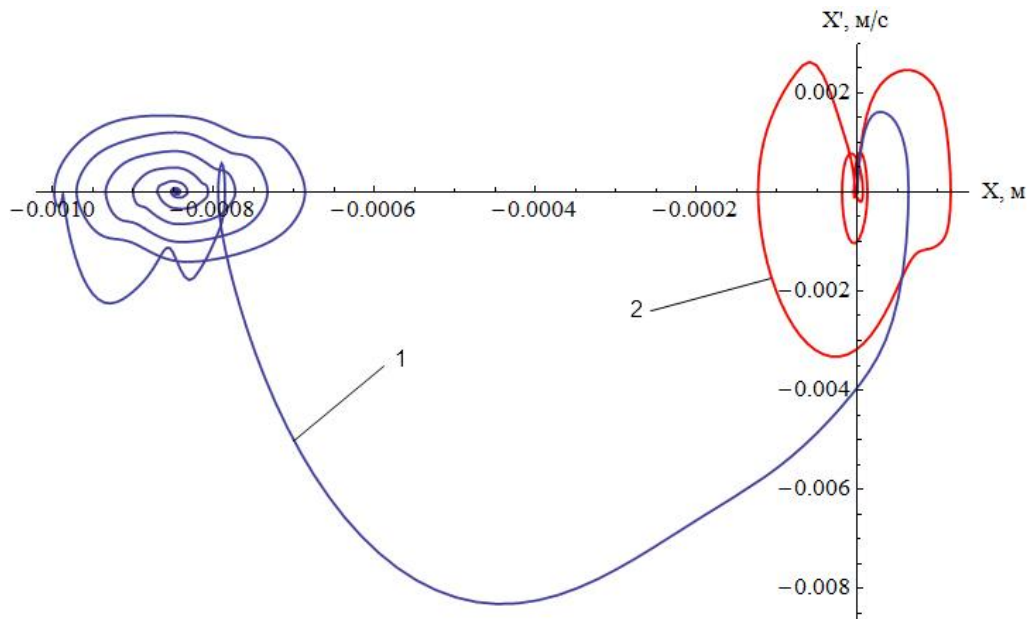


Рисунок 4.11 – Сравнение результатов расчета для забегания левой боковой рамы при учёте гироскопических эффектов от вращения колёсных пар (1) и без учёта (2)

Анализ полученных результатов показал, что вращение колёсных пар вносит заметное влияние в кинематические характеристики перемещения всех элементов тележки, из чего следует вывод о необходимости учета гироскопических свойств колёсных пар при проектировании ходовых частей подвижного состава.

#### 4.4 Моделирование прохождения одиночной вертикальной неровности

Для оценки влияния состояния пути и скорости движения экипажа было проведено исследование нескольких вариантов прохождения одиночной неровности определенной кривизны – односторонняя неровность только на правом по ходу движения рельсе, обусловленная просадкой, соответствующей разной категории содержания верхнего строения пути:

- 1) одиночная неровность в профиле (просадка) длиной волны 6 м и амплитудой 10 мм, соответствующая I категории содержания пути;
- 2) одиночная неровность в профиле (просадка) длиной волны 6 м и амплитудой 20 мм, соответствующая II категории содержания пути;



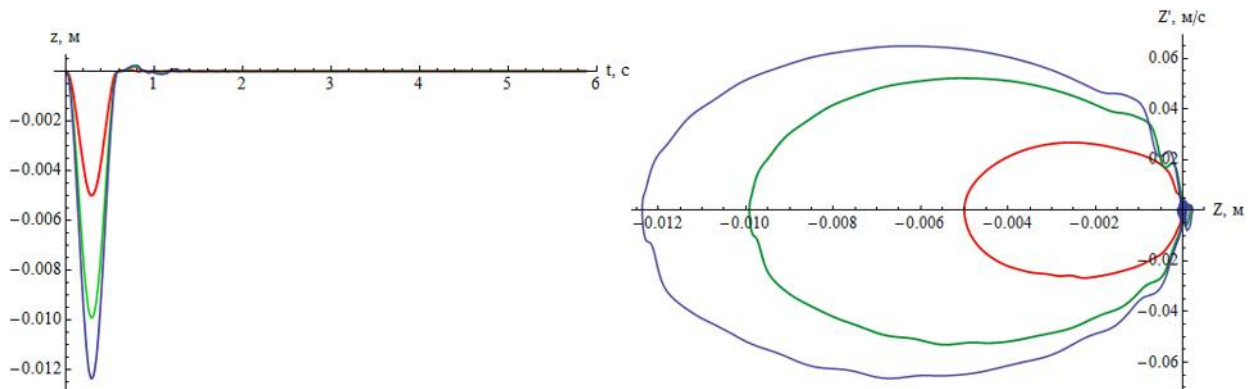
- 3) одиночная неровность в профиле (просадка) длиной волны 6 м и амплитудой 25 мм, соответствующая III категории содержания пути.

Расчёты проведены для трех значений скоростей экипажа – 17, 25 и 33 м/с (60, 90 и 120 км/ч соответственно) при трех значениях величины просадки пути. В результате рассмотрено 9 вариантов сочетания исходных параметров скорости экипажа и глубины просадки. В каждом из вариантов расчёта получены траектории элементов конструкции в фазовой плоскости. В качестве наиболее характерных параметров выбраны:

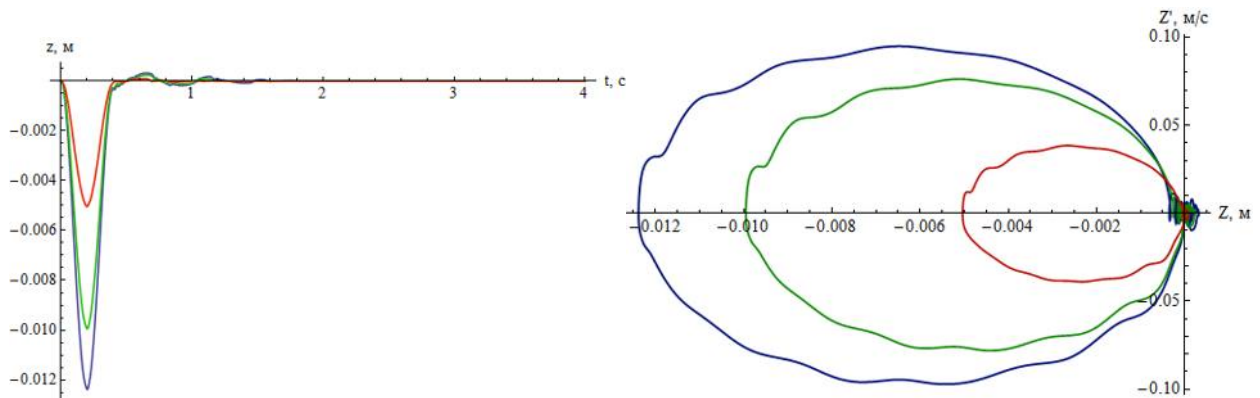
- вертикальные перемещения центра масс первой по ходу движения колёсной пары  $z(t)$  и  $\dot{z}(z)$ ;
- виляние первой колёсной пары  $\psi(t)$  и  $\dot{\psi}(\psi)$ ;
- боковая качка первой колёсной пары  $\theta(t)$  и  $\dot{\theta}(\theta)$ ;
- вертикальные перемещения центра масс надрессорной балки  $\dot{z}(z)$ ;
- боковая качка надрессорной балки  $\theta(t)$  и  $\dot{\theta}(\theta)$ ;
- вертикальные перемещения центра масс правой по ходу движения боковой рамы  $\dot{z}(z)$ ;
- виляние правой боковой рамы  $\psi(t)$  и  $\dot{\psi}(\psi)$ ;
- галоппирование правой боковой рамы  $\theta(t)$  и  $\dot{\theta}(\theta)$ ;

Результаты расчётов приведены ниже на рисунках 4.12 – 4.19. На каждом рисунке приведены графики для трех величин отклонений в содержании пути.

Скорость 17 м/с



Скорость 25



Скорость 33 м/с

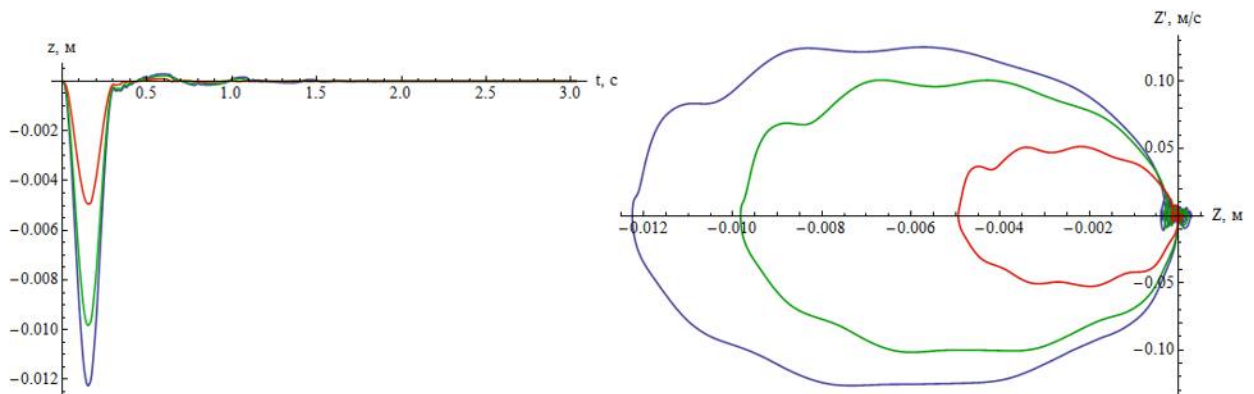
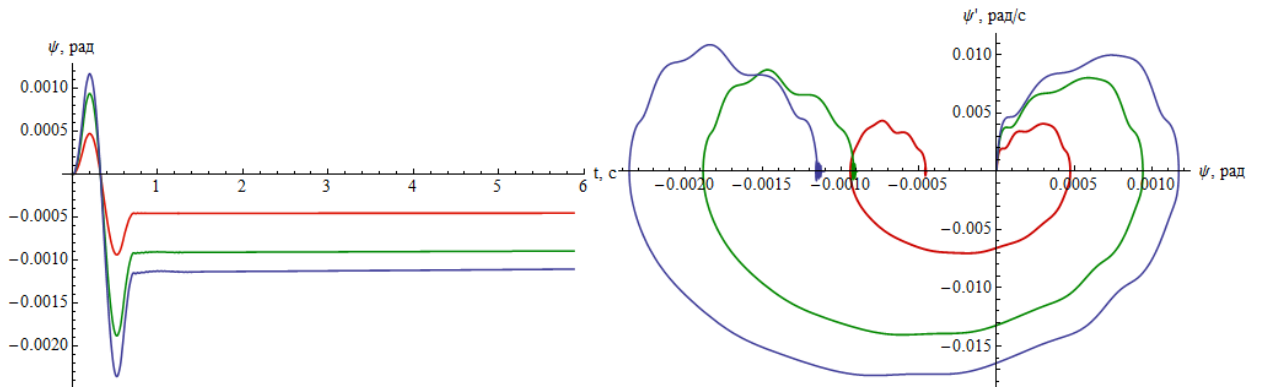
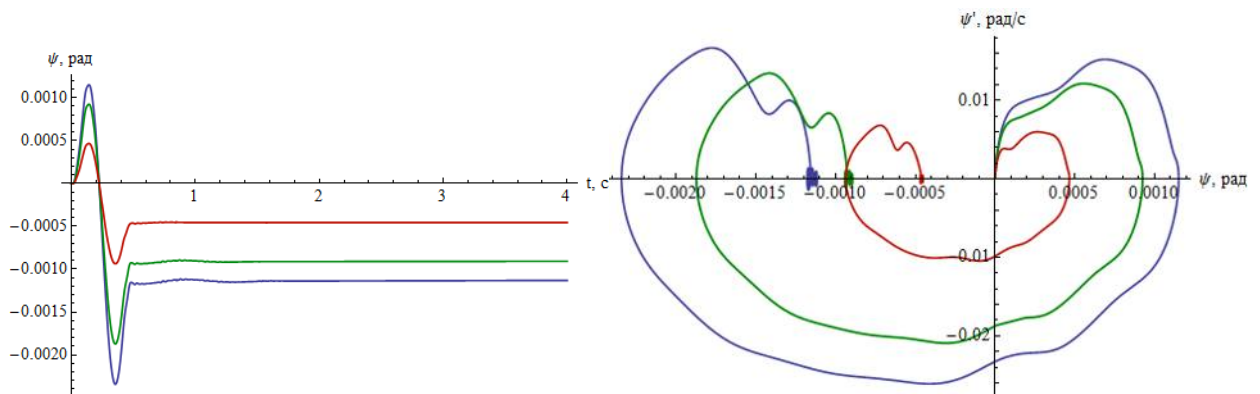


Рисунок 4.12 – Графики функций  $z(t)$  и фазовой траектории  $z'(z)$  центра масс передней колёсной пары при просадке амплитудой 10мм (красный), 20мм (зелёный) и 25 мм (синий) при скоростях 17, 25 и 33 м/с

Скорость 17 м/с



Скорость 25 м/с



Скорость 33 м/с

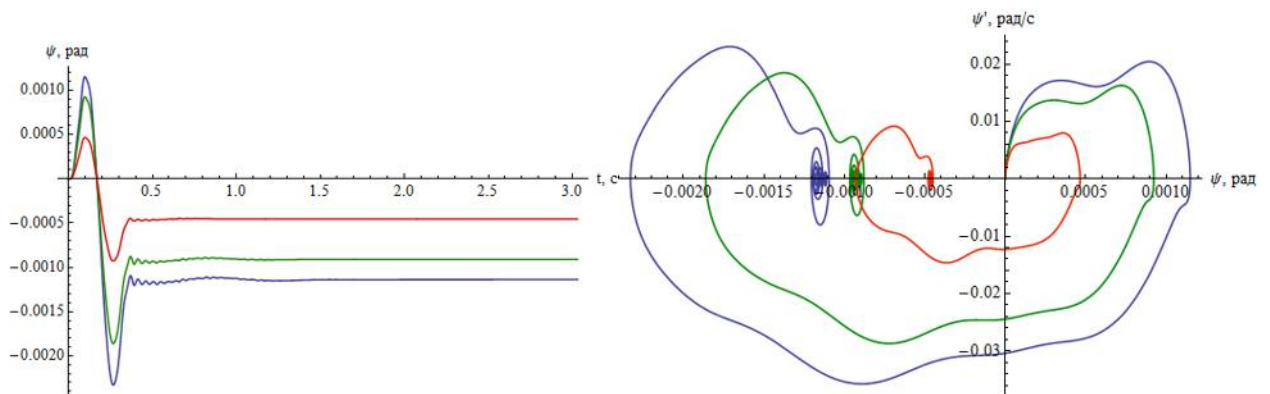
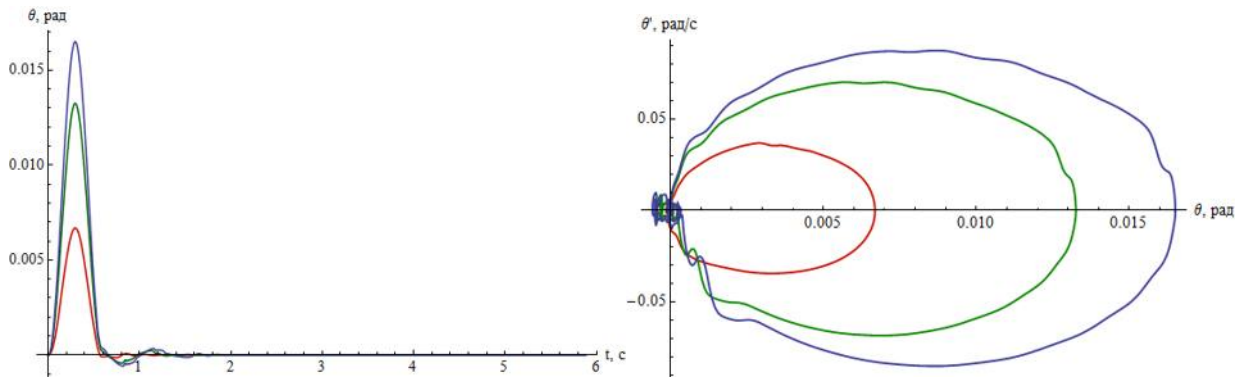
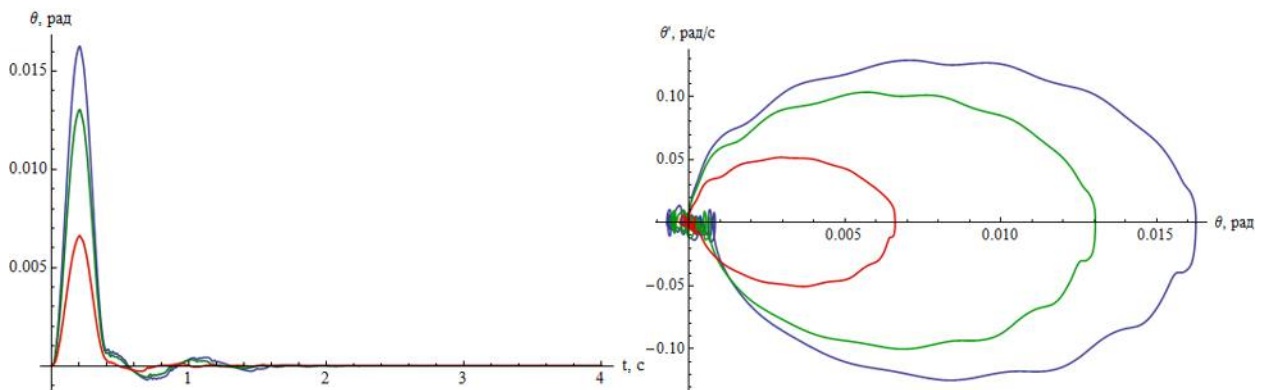


Рисунок 4.13 – Графики функций  $\psi(t)$  и фазовой траектории  $\psi'(\psi)$  угла виляния передней колёсной пары при просадке пути амплитудой 10мм (красный), 20мм (зелёный) и 25 мм (синий) при скоростях 17, 25 и 33 м/с

Скорость 17 м/с



Скорость 25 м/с



Скорость 33 м/с

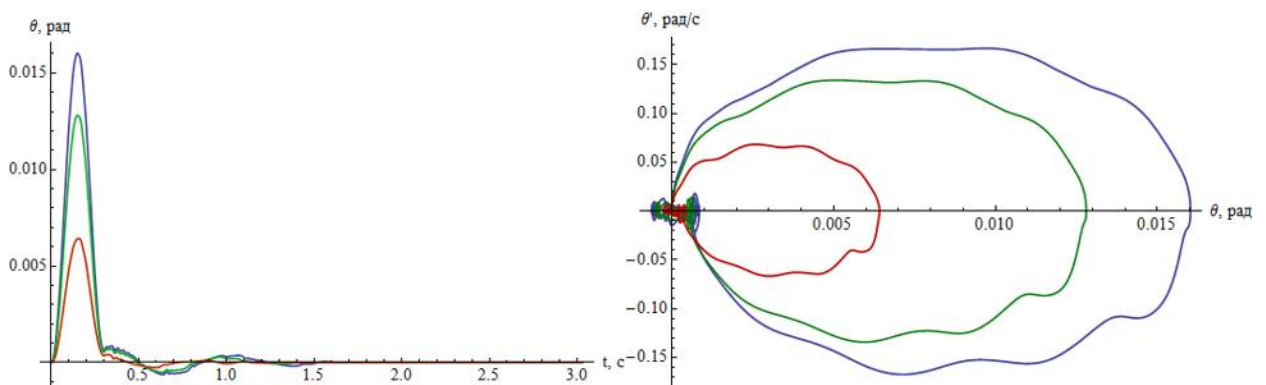
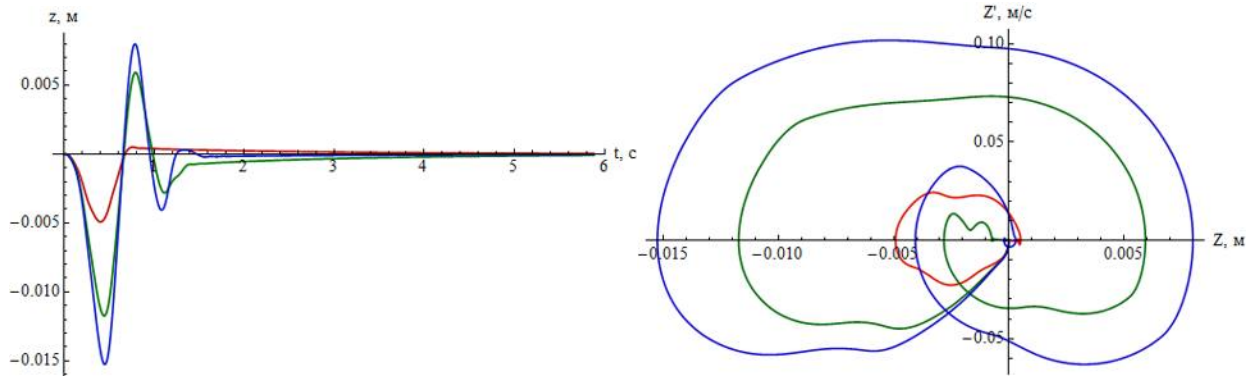
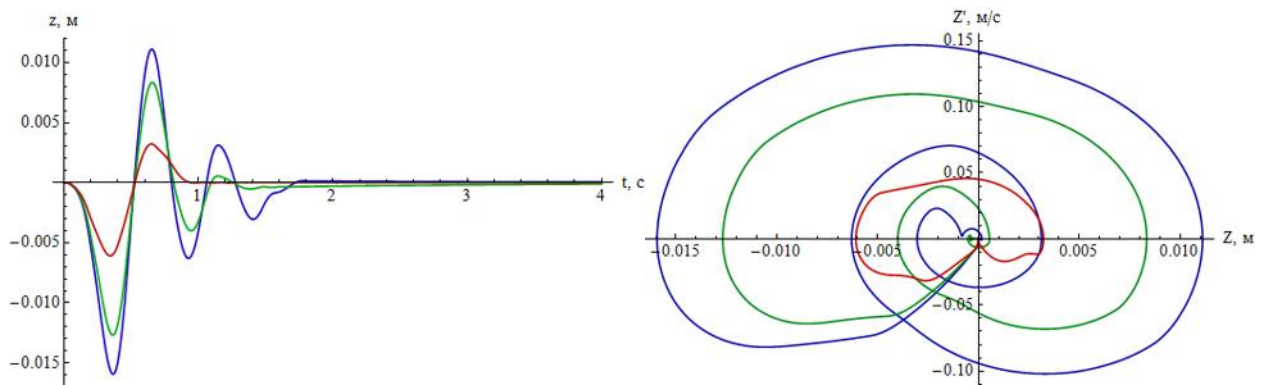


Рисунок 4.14 – Графики функций  $\theta(t)$  и фазовой траектории  $\theta'(\theta)$  угла боковой качки передней колёсной пары при просадке пути амплитудой 10мм (красный), 20мм (зелёный) и 25 мм (синий) при скоростях 17, 25 и 33 м/с

Скорость 17 м/с



Скорость 25 м/с



Скорость 33 м/с

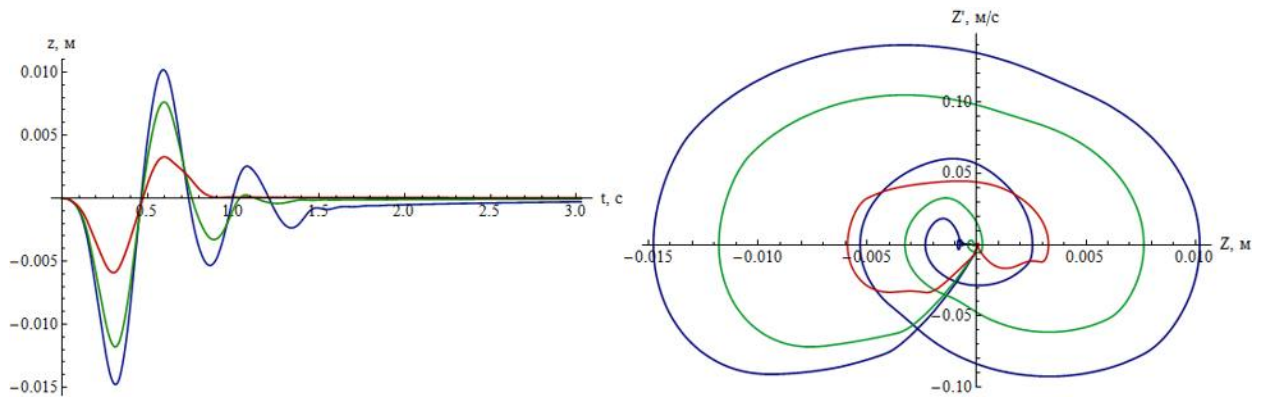
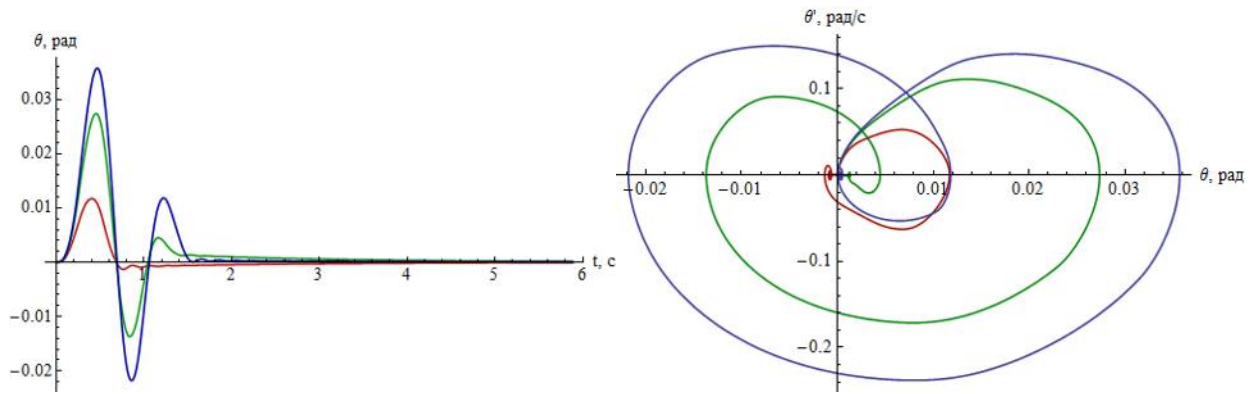
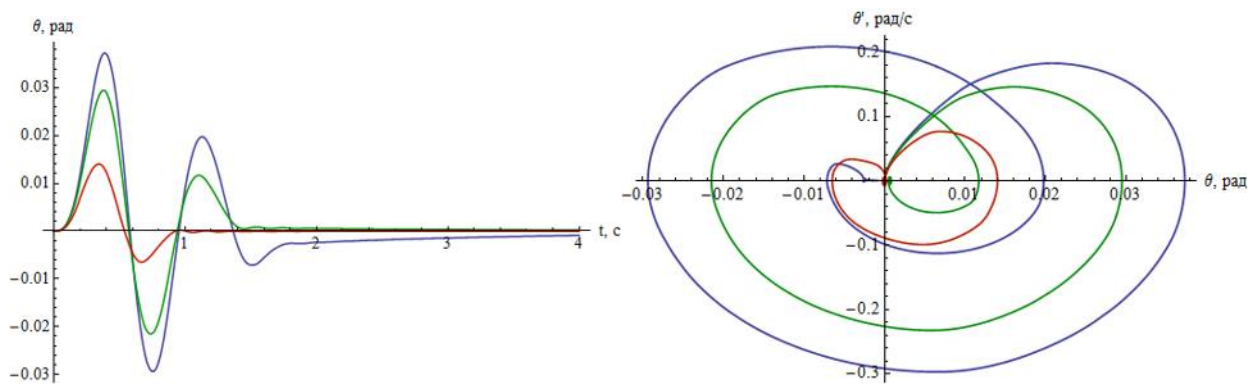


Рисунок 4.15 – Графики функций  $z(t)$  и фазовой траектории  $z'(z)$  центра масс надressорной балки при просадке амплитудой 10мм (красный), 20мм (зелёный) и 25 мм (синий) при скоростях 17, 25 и 33 м/с

Скорость 17 м/с



Скорость 25 м/с



Скорость 33 м/с

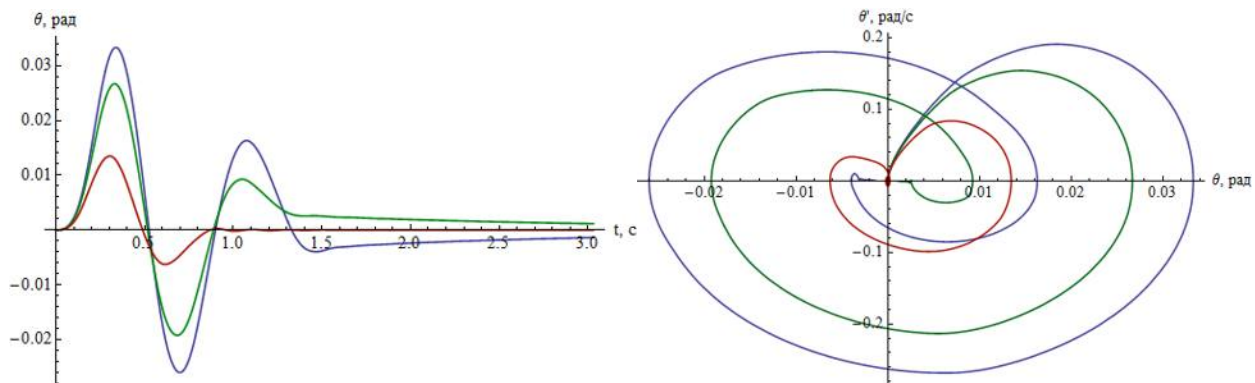
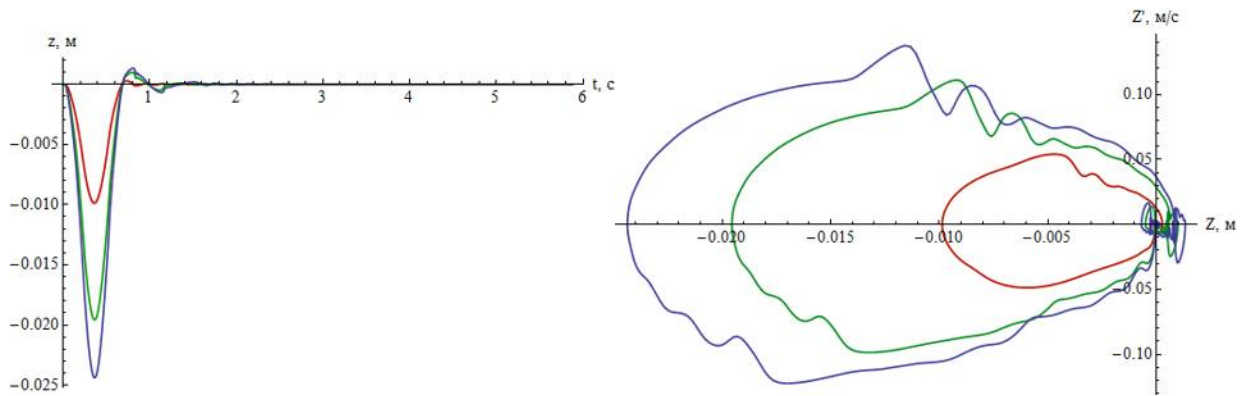


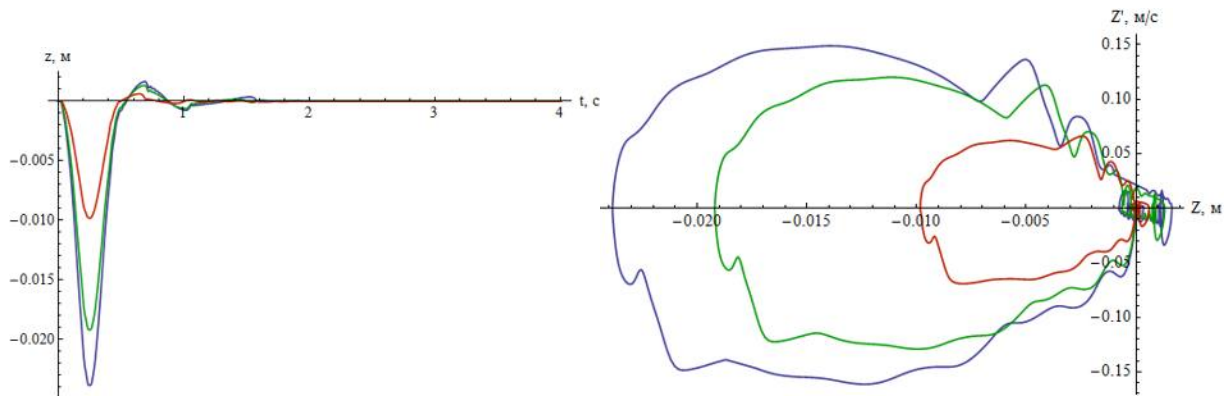
Рисунок 4.16 – Графики функций  $\theta(t)$  и фазовой траектории  $\theta'(\theta)$  угла боковой качки наддрессорной балки при просадке пути амплитудой 10мм (красный), 20мм (зелёный) и 25 мм (синий) при скоростях 17, 25 и 33 м/с



Скорость 17 м/с



Скорость 25 м/с



Скорость 33 м/с

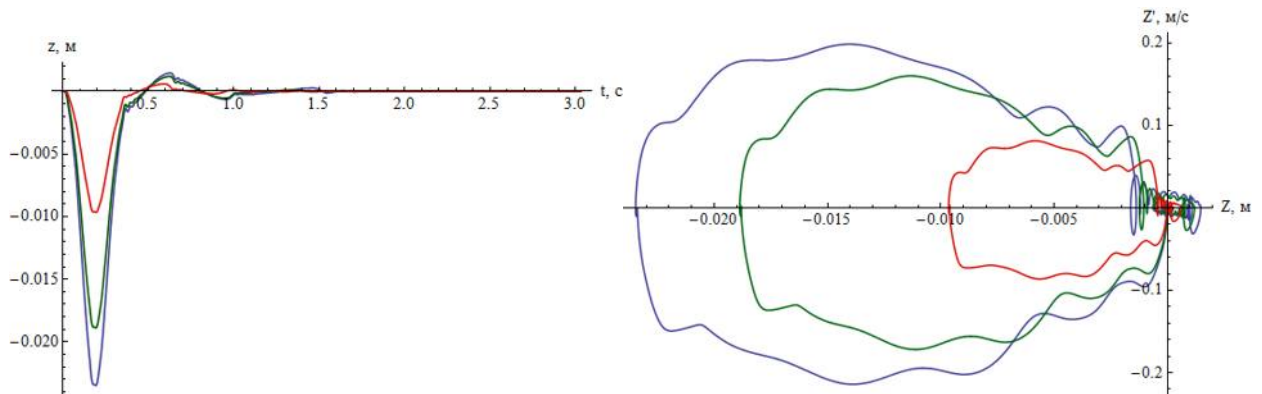
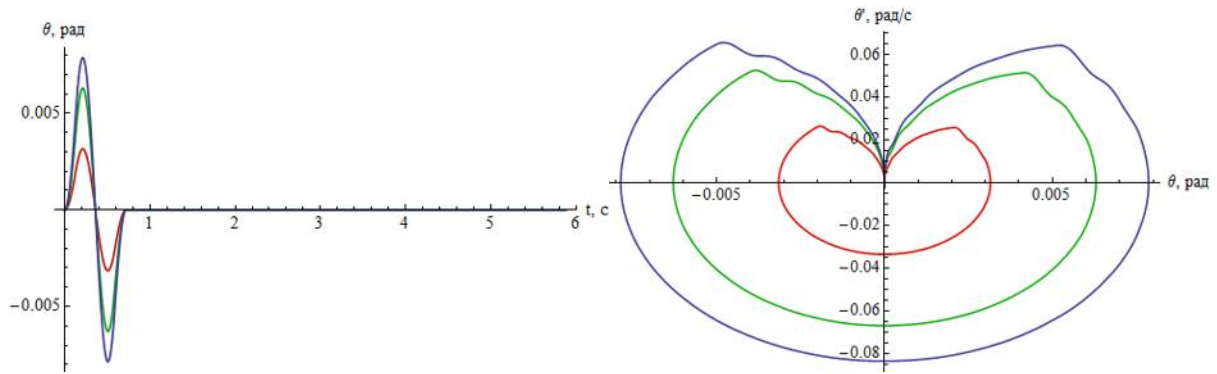
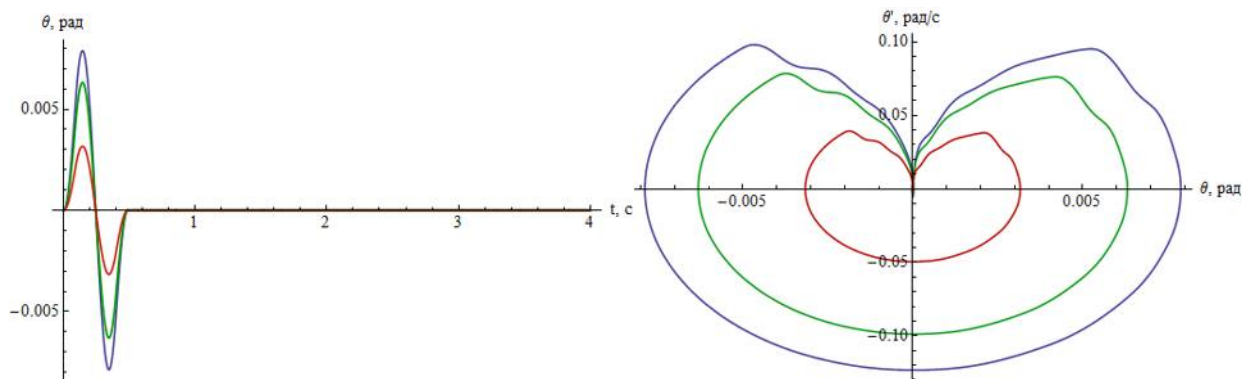


Рисунок 4.17 – Графики функций  $z(t)$  и фазовой траектории  $z'(z)$  центра масс правой боковой рамы при просадке амплитудой 10мм (красный), 20мм (зелёный) и 25 мм (синий) при скоростях 17, 25 и 33 м/с

Скорость 17 м/с



Скорость 25 м/с



Скорость 33 м/с

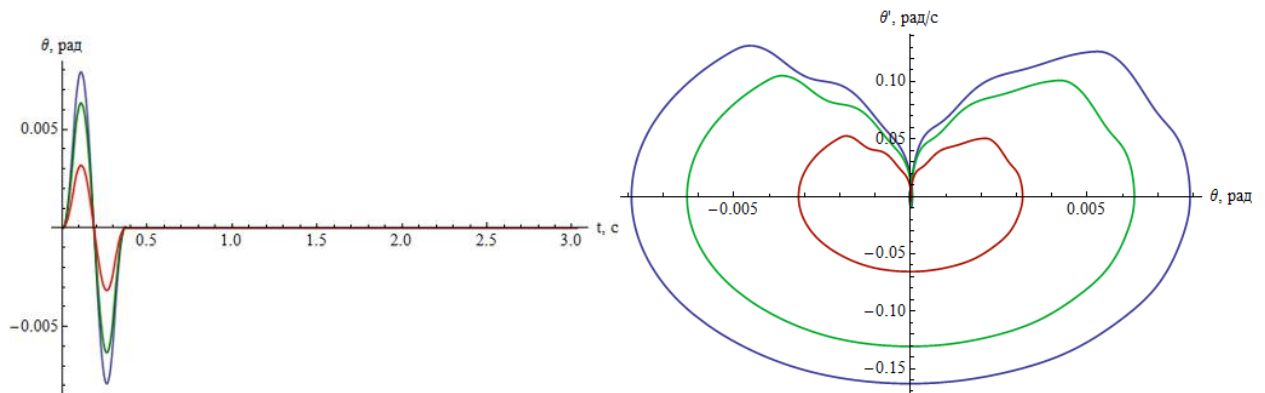
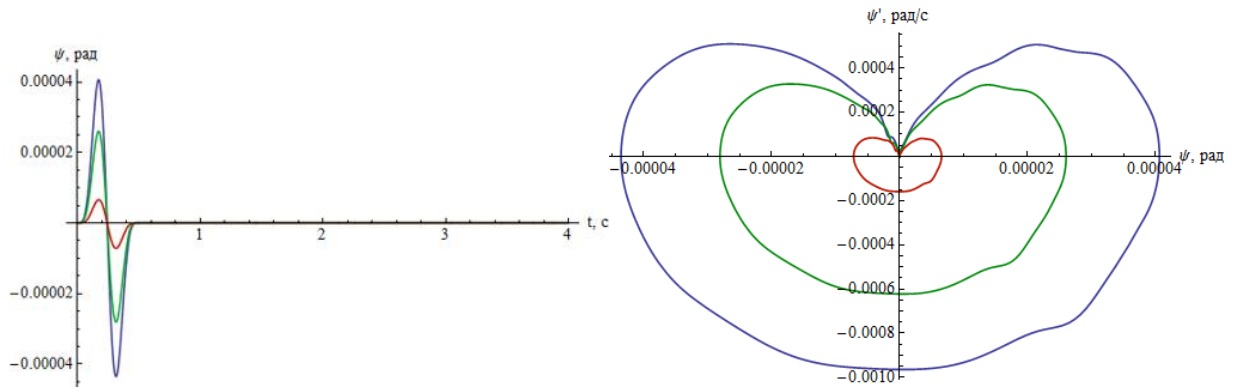


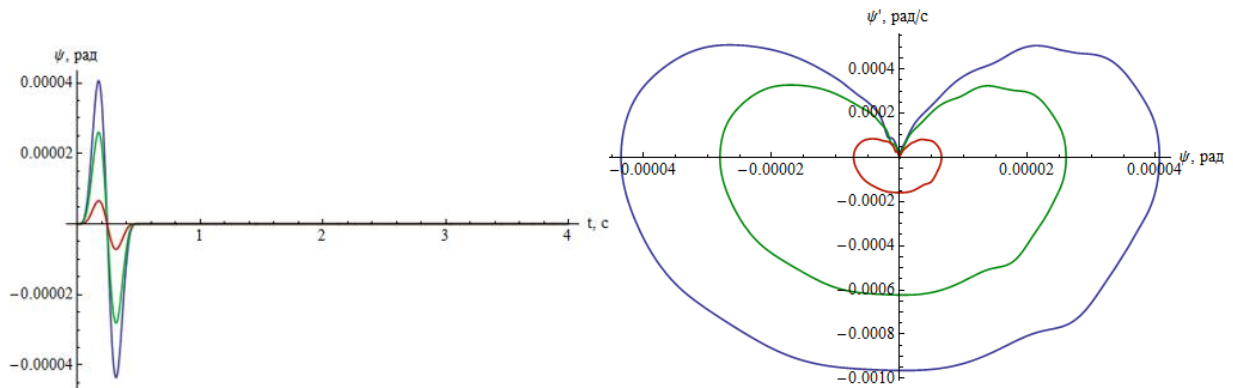
Рисунок 4.18 – Графики функций  $\theta(t)$  и фазовой траектории  $\theta'(\theta)$  угла галопирования правой боковой рамы при просадке пути амплитудой 10мм (красный), 20мм (зелёный) и 25 мм (синий) при скоростях 17, 25 и 33 м/с



## Скорость 17



## Скорость 25



## Скорость 33

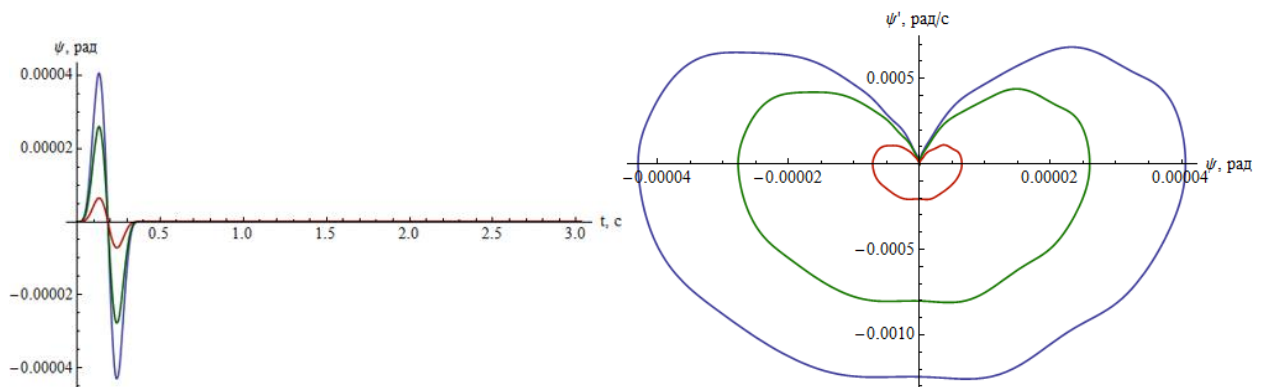


Рисунок 4.19 – Графики функций  $\psi(t)$  и фазовой траектории  $\psi'(\psi)$  угла виляния правой боковой рамы при просадке пути амплитудой 10мм (красный), 20мм (зелёный) и 25 мм (синий) при скоростях 17, 25 и 33 м/с

Анализ представленных результатов расчёта позволяет сделать вывод, что первостепенное влияние на величину предельного цикла фазовой траектории оказывает величина неровности пути. В то же время скорость движения мало оказывает влияние на положение фокуса фазовой траектории и предельный цикл, но влияет на характер движения и скорость колебательных движений звеньев. Учитывая, что разработанная модель позволяет исследовать многокритериальную зависимость воздействий на параметры движения звеньев тележки, задача поиска аналитических зависимостей между указанными критериями представляет собой отдельную научную задачу и в данной работе не ставилась. Решение предложенной задачи лежит в планах дальнейших научных исследований автора.

#### 4.5 Сравнение результатов с экспериментальными данными

Периодическая неровность пути моделируется в соответствии с РД 32.68-96 «Расчётные неровности железнодорожного пути для использования при исследованиях и проектировании пассажирских и грузовых вагонов» [88] уравнением вида:

$$\beta(s) = \frac{A}{2} \left( 1 - \cos \left( \frac{2\pi s}{L} \right) \right),$$

где  $A$  – амплитуда неровности, равная 24 мм,  $L$  – длина неровности, принятая равной 25 метрам,  $s$  – пройденный путь.

Для подтверждения адекватности разработанной математической модели динамики тележки грузового вагона приведено сравнение расчетного значения коэффициента вертикальной динамики необрессоренных масс тележки мод. 18-100 и коэффициента вертикальной динамики обрессоренных масс тележки мод. 18-578 при движении по периодической неровности длиной 25 м и амплитудой 24 мм в соответствии с рекомендациями [88] в сравнении с экспериментальными данными (рисунок 4.21).

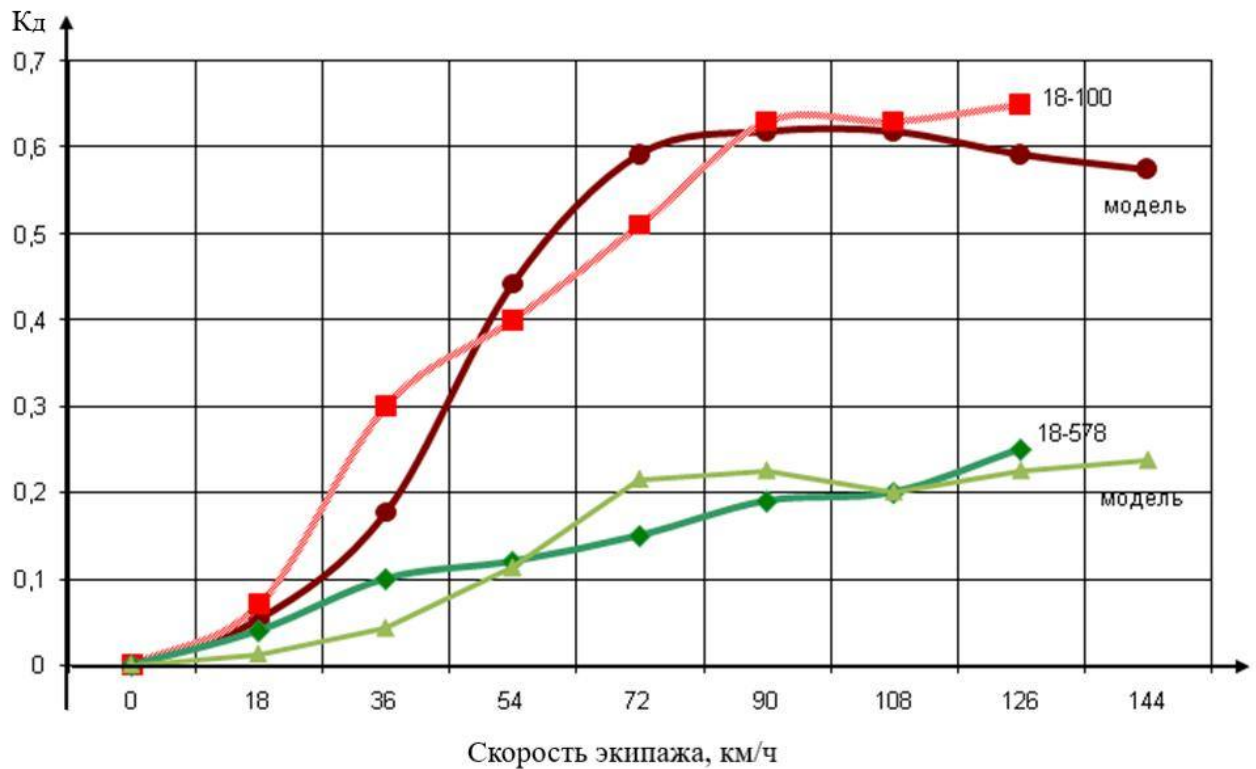


Рисунок 4.21 - Сравнение результатов расчета с экспериментальными значениями коэффициента вертикальной динамики необрессоренных масс для тележки 18-100 и для обрессоренных масс тележки 18-578

Как следует из анализа графиков, поведение модели сходно с поведением объекта исследования, что позволяет сделать вывод об адекватности построенной модели. Таким образом, можно сказать, что задача разработки математической модели динамики ходовых частей грузового вагона с учётом гироскопических свойств колёсных пар была решена. Анализ результатов расчётов и приведённых выше графиков показывает наличие существенных отличий в качественных и количественных параметрах динамических характеристик ходовых частей грузового вагона по сравнению с моделью, в которой не учитывается вращение колёсных пар. Как и ожидалось, это влияние растёт с увеличением скорости движения экипажа, что говорит о необходимости использования моделей, учитывающих гироскопические свойства вращающихся колёсных пар, в особенности при проектировании высокоскоростных экипажей и свидетельствует об актуальности проведенной работы.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе в ходе достижения поставленной цели – исследование и анализ динамических качеств ходовых частей грузового вагона с учётом гироскопических свойств вращающихся колёсных пар, были проведены исследования, которые позволили сформулировать следующие выводы.

1. Анализ исследований в области динамики подвижного состава позволил выявить современный подход, заключающийся в разработке комплексных моделей нелинейной динамики, не разделяющихся на вертикальную, продольную и поперечную динамику. В то же время отмечено, что в существующих моделях не уделено внимание учёту влияния гироскопических свойств вращающихся колёсных пар на динамику ходовых частей.

2. Разработанная математическая модель движения колёсной пары по рельсовому пути при наличии продольного и поперечного крива позволила провести сравнение и сделать вывод, что полученные результаты моделирования хорошо коррелируются с данными опытных поездок, указывающих на увеличение длины волны извилистого движения по отношению к расчётной на основании кинематических соотношений Клингеля.

3. Модель колесной пары в постановке задачи как ротора в неравноупругих опорах позволила получить зависимость собственных частот крутильных колебаний в зависимости от скорости движения экипажа, что позволило более точно оценить критические частоты и выявить, что они находятся в зоне эксплуатационных скоростей.

4. Разработанная методика оценки буксовых реакций, в том числе и в резонансных режимах позволила сравнить модели с учётом и без учета гироскопических свойств, и сделать вывод, что при разработке моделей динамики ходовых частей необходимо учитывать гироскопические свойства колёсных пар.

5. разработана математическая модель динамики тележки грузового вагона с учётом гироскопических свойств колёсных пар, позволяющая определить кинематические и динамические параметры всех элементов и узлов тележки на

штатных и резонансных режимах эксплуатации с учётом гироскопических свойств колёсных пар, а также с учётом конструкционных и эксплуатационных отклонений параметров тележки от технических норм.

Достигнуты следующие практические результаты:

- 1) создан алгоритм и программа расчёта динамики тележки с учётом упругих связей в узлах контакта элементов тележки и с учётом гироскопических свойств колёсных пар;
- 2) получены математические зависимости собственных частот колебаний колёсной пары от скорости движения поезда;
- 3) разработана методика оценки динамических реакций буксовых узлов, обусловленных гироскопическим эффектом вращающихся колёсных пар;
- 4) получены уравнения движения колёсной пары как ротора в неравноупругих опорах;
- 5) разработана методика оценки резонансных частот колёсной пары;
- 6) получены уравнения, позволяющие определить траекторию и длину волны извилистого движения колёсной пары с учётом ее гироскопических свойств и упругого проскальзывания в пятне контакта «колесо-рельс».

В качестве практических рекомендаций, следующих из результатов исследования можно отметить следующее:

- 1) возникающие динамические силы при резонансных колебания колёсных пар могут быть существенно снижены путем увеличения степени вязкого демпфирования первой ступени рессорного подвешивания;
- 2) на величину динамических реакций буксовых узлов и конструкции ходовых частей в целом оказывает существенное влияние дисбаланс колёсных пар, а также отклонение поверхности катания от цилиндрической формы. Это влияние особо проявляется в зоне первого и второго резонанса. Поэтому при эксплуатации высокоскоростного экипажа требуется ужесточить допуски на дисбаланс и геометрические отклонения поверхности катания.
- 3) При применении тележек с несвязанной рамой гироскопические эффекты приводят к дополнительному перекоосу рамы, что увеличивает углы набегания

колеса на рельс и тем самым повышает опасность вкатывания колеса на рельс. Повышение устойчивости конструкции тележки может быть достигнуто повышением связанности рам. Экспериментальные исследования в этом направлении проводятся ООО «ВНИЦТТ», входящим в состав ПАО «НПК ОВК» и подтверждают улучшение эксплуатационных характеристик при применении элементов диагональных связей боковых рам грузовой тележки.

На базе использования разработанной программы расчёта динамики тележки грузового вагона появляется возможность выполнения следующих операций:

- подбор параметров буксового подвешивания, уменьшающих влияние прецессионных колебаний колёсной пары на динамику обрессоренных масс.
- оценка условий безопасного и устойчивого движения трёхэлементной тележки и влияния на безопасность движения отклонений конструктивных параметров тележки, вызванных, в том числе, и ее эксплуатационным износом, основанная на использовании результатов расчетов по предложенной методике;
- возможность применения разработанной модели для исследования динамических свойств тележки 18-100 после ее модификации, а также для новых моделей тележки сходной структуры схемы (например, мод. 18-578, 18-194 и т.п.).
- разработанная математическая модель и предложенные методы могут использоваться для оценки устойчивости тележки грузового вагона при внешнем воздействии, а также для оценки интенсивности изнашивания в зависимости от возмущающего воздействия и прогнозирования сроков предельного износа деталей.

В продолжение начатой тематики можно отметить следующие перспективные направления исследований:

- исследование динамики колёсной пары как несимметричного жёсткого ротора в неравноупругих опорах, имеющих разные параметры для левого и правого буксового узла
- оценка массы буксового узла, позволяющей снизить динамическую нагруженность опор качения колёсной пары
- исследование устойчивости решений уравнений движения колёсной пары с учётом её гироскопических свойств и упругого проскальзывания
- исследование движения колёсной пары с учётом гироскопических свойств при сложном (параметрическом) профиле бандажа
- исследование параметрических зависимостей между характеристиками движения звеньев тележки при варьировании скорости движения, неровностей пути и наличии конструкционных и эксплуатационных отклонений параметров тележки от установленных норм.
- выбор оптимальных параметров тележки путем анализа полученных параметрических зависимостей.

Таким образом, можно сделать общий вывод, что в представленной работе решен ряд задач, связанных с оценкой и учётом влияния гироскопических свойств колёсных пар железнодорожных экипажей на динамические качества ходовых частей. Доказано, что с ростом скоростей растёт вклад гироскопических сил в общую динамическую нагруженность ходовых частей вагона. Получены значения дополнительных динамических нагрузок на буксовые узлы, обусловленные резонансными колебаниями колёсной пары, а также определены критические частоты с учётом гироскопических свойств колёсной пары. В то же время проведенные исследования открывают целый ряд новых нерешённых задач, проработка которых представляет важную научно-техническую проблему, решение которой запланировано как дальнейшее развитие научных исследований в затронутой области.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Аринчев, С. В. Моделирование колебаний ротора на несимметричной балочной опоре / С. В. Аринчев, А. С. Федюшкин // Известия ВУЗов. Сер. "Машиностроение", 2013. № 2. – С. 15-21.
2. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т. III. (Специальные главы механики) / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон, под ред. Г. Ю. Джанелидзе и Д.Р. Меркина, учебное пособие. М.: гл. ред. Физ.-мат. лит. Изд-ва «Наука», 1973, 488 с.
3. Бачурин, Н.С. Ходовые части грузовых и пассажирских вагонов : учебно-методическое пособие для вузов железнодорожного транспорта / Н.С. Бачурин, К. М. Колясов, О. В. Черепов. – Екатеринбург : УрГУПС, 2007. – 61 с.
4. Бачурин, Н.С. Нагруженность гибких элементов крепления груза в вагонах при продольных соударениях / Н.С. Бачурин, В.А. Болотин // В кн.: Повышение эффективности проектирования, эксплуатации и организации ремонта дорожных, строительных и путевых машин. – Межвуз. Сб. науч. тр. – Л.: ЛИИЖТ, 1991.- С. 34-36.
5. Беседин, И.С. Целевые задачи обеспечения устойчивого взаимодействия в системе колесо рельс / И.С. Беседин. // Сборник докладов научно-практической конференции «Современные проблемы взаимодействия подвижного состава и пути», Щербинка, Россия, 2003, С. 11 – 13.
6. Бирюков, И. В Механическая часть тягового подвижного состава / И. В. Бирюков, А. Н. Савоськин, Г. П. Бурчак и др. – Под ред. И.В. Бирюкова. – М.: Транспорт, 1992.- 440с.
7. Блохин, Е.П. Динамика поезда: нестационарные продольные колебания / Е.П. Блохин, Л.А. Манашкин. - М.: Транспорт, 1982. – 222 с.
8. Блохин, Е. П. Определение усталостной прочности несущих конструкций железнодорожных вагонов по результатам ходовых испытаний /



Е. П. Блохин, Ю. М. Черкашин, Л. А. Манашкин, М. Л. Коротенко, С. В. Мямлин, Р. Б. Грановский, В. Л. Горобец, Н. Я. Гаркави, Е. Ф. Федоров // Вестник ВНИИЖТ, 2005, № 4 С.12-19

9. Богданов, В. М. Относительное проскальзывание в точках контакта колеса с рельсом / В. М. Богданов, Д. П. Марков, И. А. Жаров, С. М. Захаров // Вестник ВНИИЖТ. 1999. №3. С. 6-10.

10. Болотин, В.А. К вопросу о применении гибких оболочечных элементов для амортизации продольных ударных нагрузок вагона / В.А. Болотин, Н.С. Бачурин // В кн.: Вопросы совершенствования конструкций и технического содержания вагонов. – Межвуз. Сб. науч. тр. ДИИТ. – Днепропетровск: ДИИТ, 1991.- С. 41-44.

11. Бороненко, Ю.П. Инновации в тележках грузовых вагонов: реальность и перспективы / Ю.П. Бороненко, Е.А. Рудакова, А.М. Орлова // Наука и транспорт, 2009. – С. 14-17

12. Бороненко, Ю.П. Комплекс исследований по продлению срока службы цистерн, находящихся в эксплуатации 10-15 и более лет. / Ю. П. Бороненко, А. В. Третьяков, С. Ю. Черников // В кн.: Проблемы механики железнодорожного транспорта. - Динамика, надежность и безопасность подвижного состава. – Тез. Докл. IX Международной конф. - Днепропетровск, 1996.- С. 195-196.

13. Бубнов, В. М. Новая тележка для грузовых вагонов / В. М. Бубнов, Ю. П. Бороненко, А. М. Орлова, Е. А. Рудакова // Железные дороги мира -2005 - №7 С.43-46

14. Бурчак, Г. П. Моделирование возмущений в виде горизонтальной неровности оси пути для исследования извилистого движения рельсового экипажа / Г.П. Бурчак, А.Н. Савоськин, Г.Н. Фрадкин, В.С.Коссов // Фундаментальные проблемы динамики и прочности подвижного состава. Юбилейный сб. науч. тр. Вып. 912.- М.: МИИТ, 1997 – С. 23-28.

15. Бурчак, Г. П. Совершенствование методики исследования свободных

боковых колебаний экипажей / Г. П. Бурчак // *Фундаментальные проблемы динамики и прочности подвижного состава. Юбилейный сб. науч. тр. Вып. 912.- М.: МИИТ, 1997, С.3-12.*

16. Бурчак, Г.П. Методика моделирования движения рельсового экипажа по пути с искривленной осью / Г.П. Бурчак, А.Н. Савоськин, Г.Н. Фрадкин, В.С. Косов // *Фундаментальные проблемы динамики и прочности подвижного состава. Юбилейный сб. науч. тр. № 912.- М.: МИИТ, 1997, С.12-22.*

17. Буйносов, А.П. Исследование волнообразного износа рельсов с учетом теории трения пары "колесо - рельс" / А.П. Буйносов, С.Н. Антропов // *Транспорт Урала. 2019. № 1 (60). С. 86-89.*

18. Вериго, М.Ф., Коган А.Я. Взаимодействие пути и подвижного состава / М.Ф. Вериго, А.Я. Коган. – Под ред. М.Ф. Вериго.- М.: Транспорт, -1986. - 560 с.

19. Вериго, М.Ф. Взаимодействие пути и подвижного состава в кривых малого радиуса и борьба с боковым износом рельсов и гребней колес. – М.: ПТКБ ЦП МПС, 1997.- 207 с.

20. Вериго, М.Ф. Об устойчивости движения колеса при вкатывании его на рельс / М.Ф. Вериго, А.Я. Коган // *Вестник ВНИИЖТ, 1965, №4. С. 25-32.*

21. Вериго, М.Ф. Причины роста интенсивности бокового износа рельсов и гребней колес. – ВНТО железнодорожников и транспортных строителей. – М.: Транспорт, 1992.- 46 с.

22. Вершинский, С. В. Динамика вагона Учебник для вузов ж.- д. трансп./ С. В. Вершинский, В. Н. Данилов, В. Д. Хусидов. — М.: Транспорт, 1991. – 359 с.

23. Вершинский, С.В. Железнодорожный путь и подвижной состав для высоких скоростей движения / А.Ф. Золотарский, С.В. Вершинский. – М.: Транспорт, 1964 – 272 с.

24. Виноградов, О. Л. Математический анализ : учебник для вузов ; СПб.:

БХВ-Петербург -2017. -752 с.

25. Глушко, М.И. Работа пружинно-фрикционного комплекта тележки грузового вагона / М. И. Глушко, А.Н. Антропов // Вестник ВНИИЖТ, 2004. №5 — С. 41 -44

26. Грачева, Л. О. Спектральный анализ вынужденных колебаний вагона при случайных неровностях железнодорожного пути и выбор параметров рессорного подвешивания / Л. О. Грачева // Труды ЦНИИ МПС.– М.: Транспорт, 1967, №347 – С.151-168.

27. Грачева, Л. О. Взаимодействие вагонов и железнодорожного пути / Л.О. Грачева // Труды ЦНИИ МПС – М.: Транспорт, 1968. №356. – 207 с.

28. Гребенюк, П. Т. Продольная динамика поезда / П.Т. Гребенюк. - Труды ВНИИЖТ. М.: Интекст, 2003. – 95 с.

29. Гребенюк, П.Т. Динамика торможения тяжеловесных поездов. / П.Т. Гребенюк. - М.: Транспорт, 1977. -152 с.

30. Данилов, В.Н. Железнодорожный путь и его взаимодействие с подвижным составом : учебник для вузов ж.-д. транспорта / В. Н. Данилов. - М: Трансжелдориздат, 1961. – 112 с.

31. Добронравов, В. В. Курс теоретической механики : учебник для машиностроит. спец. вузов / В. В. Добронравов, Н.Н. Никитин – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. школа, 1983. – 575 с.

32. Добычин, И. А. Основы нелинейной механики рельсовых экипажей. / И. А. Добычин, А. В. Смольянинов, А. Э.Павлюков. – Екатеринбург: НУДО «Межотраслевой региональный центр», 1999, - 265 с.

33. Добычин, И. А. Теоретические основы нелинейной механики рельсовых экипажей : монография / И. А. Добычин, А. В. Смольянинов, А. Э. Павлюков. – Екатеринбург : Издатель Калинина Г. П., 2009. – 278 с.

34. Добычин, И.А. Неголономная динамика колесной пары / И.А. Добычин, М.Ю. Градинаров // Вестник Уральского государственного университета путей сообщения № 1 (13) · - 2012. - С. 22-38.

35. Доронина, И. И. Определение главного вектора и главного момента активных сил, действующих на вагонную тележку в кривой малого радиуса. / И.И. Доронина // В сб. науч. тр.: Вопросы совершенствования работы железнодорожного транспорта в условиях реструктуризации отрасли. Хабаровск: ДВГУПС, -2001. -Т. 1. -С. 166-173.
36. Доронина, И. И. Учет сопротивления в узлах трения тележек при исследовании движения в кривых / И. И. Доронина // В сб. науч. тр.: Вопросы совершенствования работы железнодорожного транспорта в условиях реструктуризации отрасли. Хабаровск: ДВГУПС, 2001. Т. 1. С. 179-186.
37. Дуккипати, Р. В. Динамика подвижного состава / В. К. Гарг, Р. В. Дуккипати. Пер. с англ. / Под ред. Н. А. Панькина. – М.: Транспорт, 1988, - 391с.
38. Жуковский, Н.Е. Трение бандажей железнодорожных колес с рельсами./ – Собр. сочинений, т.VII, ГТТИ, 1949.- С.426-78.
39. Иноземцев, В.Г. Влияние железнодорожной колесной пары при высоких скоростях движения / В.Г. Иноземцев, Т.А. Тибилев – В кн.: Безопасность движения поездов // Труды науч.-практ. Конф. -М.: МИИТ, - 1999.- С. 112.
40. Калетин, С.В. Грузовые вагоны нового поколения / С.В. Калетин // Железнодорожный транспорт, 2007. №8. – С. 10-12.
41. Калкер, И.И. Обзор теории локального скольжения в области упругого контакта с сухим трением / И.И. Калкер, А.Д. Патер. Прикладная механика. - М., 1971. №5. т.7. – С. 9-20.
42. Кашников, В.Н. Управляемое движение ж.-д. экипажей в кривых участках пути / В.Н. Кашников, В.Г. Козубенко и др.. // В кн.: Проблемы механики ж.-д. транспорта. Повышение надежности и совершенствование конструкции подвижного состава. – Тез. Докл. Всесоюзной конф.- Днепропетровск: ДИИТ, 1984.- С.30.
43. Ковалев, Р. В. Разработка и реализация эффективных методик

компьютерного исследования динамики и оптимизации параметров ходовых частей железнодорожных экипажей / Дисс. .канд. техн. наук Брянск -2004 - 114 с.

44. Коган, А.Я. Вертикальные динамические силы, действующие на путь / Тр. ВНИИЖТ, вып.402. - М.: Транспорт, 1969.- 206 с.

45. Коган, А.Я. Расчет железнодорожного пути на вертикальные динамические нагрузки / А.Я. Коган // Тр. ВНИИЖТ, вып.502. - М.: Транспорт, 1973.- 80 с.

46. Коган, А.Я. Исследование спектральных характеристик вертикальных составляющих сил в месте контакта колеса и рельса / А.Я. Коган, А.А. Верхотин // Тр. ВНИИЖТ.- М.: Транспорт, 1985.- С. 25-33.

47. Коган, А.Я. Влияние конструкции и состояния пути на устойчивость колеса / А. Я. Коган, Г. И. Матусовский // Вестник ВНИИТЖ, 1982, №8. С. 42-44.

48. Колесников, В.И. Оценка работы сил трения в боковом контакте «колесо-рельс» и на сопрягаемых поверхностях пятникового узла грузовых вагонов методами компьютерного моделирования / Колесников В.И., Сычев А.П., Зарифьян А.А., Колесников И.В., Сычев А.А. // Вестник Ростовского государственного университета путей сообщения. 2015. №1 (57). С. 13-21.

49. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн; Т. Корн. - М.: Наука, 1974. – 832 с.

50. Колесников, В.И. Повышение безопасности движения подвижного состава и обеспечение надёжности и долговечности узлов трения вагонов / Колесников В.И., Сычев А.П // В книге: Полимерные композиты и трибология (ПОЛИКОМТРИБ-2017) Тезисы докладов международной научно-технической конференции. 2017. С. 50.

51. Косов, В. С. Выбор параметров трехэлементной тележки грузового вагона методами компьютерного моделирования его динамики / В. С. Косов, Э. М. Сорочкин, Г. С. Михальченко, Д. Ю. Погорелов, В. А. Симонов // Наука

и прогресс транспорта. Вестник Днепропетровского национального университета железнодорожного транспорта. 2004. №5. С.109-113.

52. Крылов, А. Н. Общая теория гироскопов и некоторых технических их применений / А. Н. Крылов, Ю. А. Крутков. – Л.: АН СССР, 1932. – 394 с.

53. Кудюров, Л. В. Об оценке вклада гироскопического момента в разгрузку колеса при влиянии колесной пары / Л. В. Кудюров, Ю. К. Мустафаев, В. В. Федоров, В. П. Червинский // Наука и технологии. Том 2. Труды XXVI Российской школы. – М.: РАН, 2006. С. 68-74.

54. Кудюров, Л.В. Динамическая модель движения двухосной вагонной тележки с учетом эксплуатационных и конструктивных отклонений параметров от технических норм / Л.В. Кудюров, Ю. К. Мустафаев, В.В. Федоров, В.П. Червинский // В сборнике: Актуальные проблемы динамики и прочности материалов и конструкций: модели, методы, решения Материалы международной научно-технической конференции. 2007. С. 162-163.

55. Кудюров, Л.В. Математическое моделирование динамики тележки вагона в обобщенных координатах / Л.В. Кудюров, Ю. К. Мустафаев, В.П. Червинский // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Математическая. 2007. № 1 (5). С. 37-41.

56. Кудюров, Л.В. Моделирование угона рельсового пути под действием динамических нагрузок / Л.В. Кудюров, Ю. К. Мустафаев // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2005. № 34. С. 171-177.

57. Кудюров, Л.В. Исследование динамики вагонного колеса, имеющего ползун на поверхности катания : монография / Л.В. Кудюров, Д.С. Гарипов ; -Самара : Изд-во СамГУПС, 2013. -139 с.

58. Кудюров, Л.В. Об оценке вклада гироскопического момента в разгрузку колеса при влиянии колесной пары / Л.В. Кудюров, Ю. К. Мустафаев, В.В. Федоров, В.П. Червинский // В сборнике: Наука и технологии Труды XXVI Российской школы. Российская академия наук;

Министерство обороны Российской Федерации; Федеральное космическое агентство; Федеральное агентство по промышленности; Министерство образования и науки Российской Федерации; Высшая аттестационная комиссия; Межрегиональный совет по науке и технологиям. 2006. С. 68-74.

59. Лазарян, В. А. Устойчивость движения рельсовых экипажей / В. А. Лазарян, Л. А. Длугач, М. Л. Коротенко. – Киев: Наукова думка, 1974.

60. Лесничий, В. С. Влияние особенностей конструкций, параметров ходовых частей и межвагонных связей на устойчивость движения и ходовые качества вагонов высокоскоростных поездов : дисс. канд. техн. наук -СПб - 1999 -115с.

61. Марье, Г. Взаимодействие пути и подвижного состава. / Г. Марье. - М.: Госжелдориздат, -1993. -336 с.

62. Мельничук, В.А. Анализ автоколебаний ходовых частей вагона с помощью видео / В.А. Мельничук, О.М. Савчук, Н.А. Гричаный, И.Ю. Хоменко // Вагонный парк, №9, -2010. – С.10-12.

63. Морчиладзе, И.Г. Сравнение конструктивных схем отечественной и зарубежной тележек для грузовых вагонов / И.Г. Морчиладзе, М.М. Соколов, А.В. Додонов // Железные дороги мира. – 2004. - №8 – С. 48-52.

64. Мугинштейн, Л. А. Нестационарные режимы тяги (Сцепление. Критическая масса поезда). / Л. А. Мугинштейн, А. Л. Лисицын - М.: Интекст, -1996. 176 с.

65. Мугинштейн, Л. А. Энергооптимальные режимные карты для машинистов / Л. А. Мугинштейн, В. И. Рахманинов, И. А. Ябко // Локомотив. -2001. № 2 (530). С. 6.

66. Мустафаев, Ю. К. Оценка буксовых реакций колёсной пары в резонансных режимах / Ю.К. Мустафаев, Л. В. Кудюров, А.А. Свечников // Вестник транспорта Поволжья, №4(76). – Самара, 2019. – С. 38-45..

67. Мустафаев, Ю.К. Исследование влияния гироскопических свойств колесной пары на динамические реакции в буксовых узлах / Мустафаев Ю.К.

// В книге: Компьютерное моделирование в железнодорожном транспорте: динамика, прочность, износ Сборник тезисов III научно-технического семинара. 2016. – С. 46-47.

68. Мустафаев, Ю.К. Динамика тележки грузового вагона с учётом гироскопических свойств колёсной пары / Ю.К. Мустафаев, Л. В. Кудюров, А.А. Свечников // Вестник транспорта Поволжья, №6(48). – Самара, 2014. – С. 23-30.

69. Мустафаев, Ю.К. Влияние гироскопических свойств колёсной пары на изменение частоты собственных колебаний / Ю.К. Мустафаев // Вестник транспорта Поволжья, №5(53). – Самара, 2015. – С. 47-53.

70. Мустафаев, Ю.К. Динамика тележки грузового вагона с учётом параметров демпфера сухого трения / Ю.К. Мустафаев, Л.В. Кудюров // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2011. Т. 13. № 4-3S. С. 226-228.

71. Мустафаев, Ю.К. Имитационная математическая модель тележки 18-100 грузового вагона / Ю.К. Мустафаев // Обзорение прикладной и промышленной математики. 2006. Т. 13. № 6. -С. 1099-1100.

72. Мустафаев, Ю.К. Об аналитическом решении уравнений колебаний колесной пары с учётом её гироскопических свойств / Ю. К. Мустафаев, Е.М. Плохов, А.А. Свечников // Вестник транспорта Поволжья, №1(85). – Самара, 2021. – С. 12-18.

73. Мустафаев, Ю.К. О влиянии отклонений параметров фрикционного клинового гасителя на возникновение боковой качки кузова грузового вагона / Ю.К. Мустафаев // Наука и образование транспорту. 2016. № 2. С. 236-238.

74. Мустафаев, Ю.К. Разработка математической модели и исследование различных форм боковых колебаний кузова грузового вагона / Ю.К. Мустафаев, А.С. Мазанов // Наука и образование транспорту. 2017. № 2. С. 162-165.

75. Мустафаев, Ю.К. Разработка математической модели динамики



колесной пары с учётом её упругого проскальзывания и гироскопических свойств / Мустафаев Ю. К., Григорьева Д. Б., Носырев Д. Я // В сборнике: Подвижной состав: современные тенденции и перспективы развития транспортной отрасли : материалы научного марафона, посвященного 30-летию со дня основания факультета «Подвижной состав и путевые машины», 2019. – Самара, 2019. – С. 67-74.

76. Мямлин, С.В. Моделирование динамики рельсовых экипажей. – Д.: Новая идеология, 2002. – 240 с.

77. Нафиков, Г-А. М. Динамика ЭПС : учеб.-метод. пособие / Г-А. М. Нафиков. – Екатеринбург : УрГУПС, 2010. – 88 с.

78. Орлова, А. М. Влияние конструктивных схем и параметров тележек грузовых вагонов с буксовым подвешиванием на их устойчивость, ходовые качества и нагруженность: дисс. канд. техн. наук. –СПб.: ПГУПС -2001 -166 с.

79. Орлова, А. М. Влияние конструктивных схем и параметров тележек на устойчивость, ходовые качества и нагруженность грузовых вагонов / дисс. доктора. техн. наук. –СПб.: ПГУПС -2008 -403 с.

80. Орлова, А. М. Обоснование возможности реализации рациональной горизонтальной жесткости тележки трехэлементной конструкции / А. М. Орлова // Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна. Вип. 5. Дніпропетр. нац. ун-т залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. Д., 2004. С. 157 – 162.

81. Певзнер, В.О. Статистические показатели состояния пути / В.О. Певзнер и др. // Вестник ВНИИЖТ, -1984, №2.- С. 41-45.

82. Петров, Г.И. Оценка безопасности движения вагонов при отклонениях от норм содержания ходовых частей и пути : дисс. докт. техн. наук. - МИИТ - 2000 г. -363 с.

83. Плоткин, В.С. Развитие норм расчета и проектирования вагонов ж.д. колеи 1520 (1524)./ В.С. Плоткин, Л.Д. Кузьмич, А.Д. Кочнов, Ю.М.Черкашин // В кн.: Актуальные проблемы развития железнодорожного транспорта. Т.1 –

- II Международная науч.-техн. конф., М.: МПС-МИИТ, 1996.- С. 85.
84. Погорелов, Д.Ю. Введение в моделирование динамики системы тел / Д.Ю. Погорелов. – Брянск: БГТУ, 1996. – 156 с.
85. Погорелов, Д.Ю. Моделирование контактных взаимодействий в задачах динамики систем тел. / Д.Ю. Погорелов, А.Э. Павлюков, Т.А. Юдакова, С.В. Котов // Динамика, прочность и надежность транспортных машин. Под ред. Б.Г. Кеглина. Брянск: БГТУ, 2002. - С. 11 – 23
86. Погорелов, Д.Ю. Моделирование механических систем с большим числом степеней свободы. Численные методы и алгоритмы: Автореферат дисс. доктора физ.мат. наук / Д.Ю. Погорелов. Брянск, 1994. 47 с.
87. Радченко, Н.А. Криволинейное движение рельсовых транспортных средств / Н.А. Радченко - Киев: Наукова думка, 1988.- 212 с.
88. РД 32.68-96 Расчётные неровности железнодорожного пути для использования при исследованиях и проектировании пассажирских и грузовых вагонов / М.: ВНИИЖТ, 1996. – 15 с.
89. Ромен Ю.С. Динамика движения колесной пары железнодорожного экипажа с учетом характеристик рельсового пути / Ю.С. Ромен, Я.М. Клебанов, Е.А. Солдусова // Тр. НГТУ им Р.Е. Алексеева. 2014. № 2 (104). С. 326–332.
90. Ромен, Ю. С. Влияние перемещений элементов тележки грузового вагона на углы набегания колесных пар в кривых. / Ю. С. Ромен, В. М. Богданова, В.Н. Заверталюк // Вестник ВНИИЖТ, 2002, № 2
91. Рубан, В.Г. Решение задач динамики железнодорожных экипажей в пакете Mathcad: учеб. пособие / В.Г. Рубан, А.М. Матва ; Рост. гос. ун-т путей сообщения. –Ростов н/Д, 2009. – 99 с.
92. Рудакова, Е. А. Влияние конструктивных схем и параметров межосевых связей тележек на ходовые качества грузовых вагонов : дисс. канд. техн. наук. –СПб.: ПГУПС -2005. -150 с.
93. Северинова, Т. П. Увеличение долговечности надрессорной балки

грузового вагона за счет установки упругих скользунов / Т. П. Северинова, О. Н. Попов // Вестник ВНИИЖТ, 2005, № 3

94. Сенько, В.И. Математическое моделирование движения одиночной колёсной пары с учётом явления упругого скольжения / В.И. Сенько, С.М. Васильев // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. № 3(47) -Иркутск : ИрГУПС. -2015 С. 18-21.

95. Тибиллов, Т.А. Асимптотические методы исследования колебаний подвижного состава // Тр. РИИЖТ, вып.78.- Ростов-на-Дону: Транспорт, 1970.- 224 с.

96. Тибиллов, Т.А. Колебания высокоскоростного рельсового экипажа в условиях постоянно действующих возмущений // Фундаментальные проблемы динамики и прочности подвижного состава. Юбилейный сб. науч. тр. Вып. 912.- М.: МИИТ, 1997, С. 50-53.

97. Тибиллов, Т.А. Нелинейные задачи динамики рельсовых экипажей // В кн.: Проблемы механики наземного транспорта. - Киев, 1980.- С. 137-138.

98. Тимошенко, С. П. Колебания в инженерном деле /С. П. Тимошенко, Д.Х. Янг, У. Уивер ; - М.: ФИЗМАТЛИТ, -1985. – 474 с.

99. Трофимович, В. В. Динамика электроподвижного состава : учебное пособие / В.В. Трофимович. – Хабаровск : Изд-во ДВГУПС, 2007. – 120 с.

100. Туранов, Х. Т., Бондаренко А.Н., Власова Н.В. Крепления грузов в вагонах: Учебное пособие для вузов железнодорожного транспорта / Х. Т. Туранов, А.Н. Бондаренко, Н.В. Власова. Под ред. Х.Т. Туранова. – Екатеринбург : Изд-во УрГУПС, 2006. – 321 с.

101. Туранов, Х. Т. Моделирование нагруженности рельсовой колеи при несимметричном размещении общего центра тяжести негабаритного груза поперек вагона : вагоны и вагонное хозяйство / Х. Т. Туранов, С. А. Ситников. - С.97-104

102. Туранов, Х. Т. Построение динамических моделей устойчивости колеса колесной пары грузового вагона при вкатывании на головку рельса / Х. Т.

Туранов, А. Р. Якупов // Транспорт: наука, техника, управление. - 2011. - N 7. - С. 8-14

103. Туранов, Х. Т. Теоретическая механика в задачах грузовых перевозок / Х. Т. Туранов; Федеральное агентство ж.-д. трансп., Уральский гос. ун-т путей сообщ. - Новосибирск : Наука, 2009

104. Ушкалов, В.Ф. Комплексная модернизация ходовых частей грузовых вагонов / В.Ф. Ушкалов, Т.Ф. Мокрый, И.Ю. Малышева, И.А. Мащенко, С.С. Пасичник // Вагонный парк. №2. 2007. – С.18 - 22.

105. Ушкалов, В. Ф. Явление "JAMMING" в динамике вагона с тележками 18-100 / В.Ф. Ушкалов, М.М. Жечев, А.Д. Маккисик // Вестник ВНИИЖТ : Научно-технический журнал. - 2004. - №2. - С. 9-13

106. Ушкалов, В.Ф. Математическое моделирование колебаний рельсовых транспортных средств / В.Ф. Ушкалов, Л.М. Резников, В.С. Иккол и др.; ред. В.Ф. Ушкалов. –К.: Наукова думка, 1989. – 240с.

107. Ушкалов, В.Ф. Случайные колебания механических систем при сухом и вязком трении. - В сб.: Нагруженность, колебания и прочность сложных механических систем. - Киев: Наукова думка, 1977.- С.16-23.

108. Филиппов, В.Н. Исследование влияния размерных допусков, износов деталей гасителя колебаний тележки ЦНИИ-ХЗ-О на величину коэффициента относительного трения (в вероятностном аспекте) / В.Н.Филиппов, А.В. Смольянинов, Г.И. Петров // Тр. МИИТ, вып. 647, 1981.- С.61-65.

109. Филиппов, В.Н. Исследования пути трения фрикционных поверхностей деталей гасителя колебаний / В.Н. Филиппов, С.А. Сенаторов, А.В. Смольянинов, Г.И. Петров // Вестник ВНИИЖТ, 1983, №4.- С.30-32.

110. Фролов, К.В. Нелинейные задачи динамики машин. - М.: Машиностроение, 1992. - 376 с.

111. Хореев, И.В. Определение моментов инерции тел методами 3D моделирования / И.В. Хореев, науч. рук. Ю.К. Мустафаев // В сборнике: Дни студенческой науки сборник материалов XLII научной конференции

обучающихся СамГУПС. 2015. С. 38-39.

112. Хохлов, А.А. Оптимальные законы управления динамическими процессами вагонов. // Труды МИИТ, вып.679, 1981.- С. 42-60.

113. Хохлов, А.А. Параметры перспективных двухосных тележек вагонов. // Труды ВНИИЖТ, вып.639, 1981.- С.51-60.

114. Хохлов, А.А. Построение единой математической модели колебаний многоосных экипажей. // Вестник ВНИИЖТ, №3, 1982.- С.23-25.

115. Хохлов, А.А. Расчет нагруженности вагонов. - М.: МИИТ, 1999.- 146с.

116. Хохлов, А.А. Решение экстремальных задач динамики вагонов. - М.: МИИТ, 1982.- 105с.

117. Хусидов, В.Д. Математическая модель и методика исследования пространственных колебаний многоосных грузовых вагонов с различными схемами ходовых частей и опорных устройств / В.Д. Хусидов, В.Н. Филиппов, Г.И. Петров - МИИТ. ЦНИИТЭИ Тяжмаш 08.02.88, №2-ТМ88. М.; 1988.- 43 с.

118. Хусидов, В.Д. Математическая модель и некоторые результаты исследования пространственных колебаний колесных пар грузовых вагонов. / В.Д. Хусидов, В.Н. Филиппов, Г.И. Петров // Тез. докл. конф.: Проблемы механики ж.-д. транспорта. – Днепропетровск, 1984.- С.136-137.

119. Хусидов, В.Д. Моделирование колебаний систем с узлами сухого трения / В.Д. Хусидов, Г.И. Петров, М.В. Лапенюк. – ЦНИИТЭИ МПС, №4760.- М.: МИИТ, 1988.- 14с.

120. Хусидов, В.Д. Численное моделирование колебаний механических систем с сухим трением в связях / В.Д. Хусидов, Г.И. Петров, М.В. Лапенюк.. // В кн.: Проблемы механики железнодорожного транспорта. - Тез. докл. Всесоюз. н.-т. конф., Днепропетровск, 1988.- С.70.

121. Цеглинский, К.Ю. Железнодорожный путь в кривых / К.Ю. Цеглинский - М., 1903.- 155с.

122. Цыган, Б.Г. Современное состояние и перспективы развития ходовых

частей грузового подвижного состава / Б.Г. Цыган, С.Д. Мокроусов // Вісник СНУ ім. В.Даля, №12(166) ч.1. 2011. – С.267-274.

123. Чекушин, В.С. Основы механики подвижного состава : консп. лекц. / В.С. Чекушин. – Красноярск : КриЖТ ИрГУПС, 2017. – 103 с.

124. Червинский, В.П. Влияние износа ходовых частей подвижного состава на устойчивость их движения : монография / В.П. Червинский. – Самара : СамГУПС, 2013. – 225 с.

125. Черкашин, Ю.М. Динамика наливного поезда / Ю.М. Черкашин. // Тр. ВНИИЖТ, вып.543.- М.: Транспорт, 1975.- 136 с.

126. Черкашин, Ю. М. Использование результатов фундаментальных и прикладных исследований проблем взаимодействия подвижного состава и пути при решении задачи предотвращения сходов колеса и рельса / Ю. М. Черкашин // Сборник докладов научно-практической конференции «Современные проблемы взаимодействия подвижного состава и пути», Щербинка, Россия, 2003, С. 21 – 29.

127. Шадур, Л.А. Вагоны: Конструкция, теория и расчет / Л.А. Шадур и др. - М.: -1965. -440 с.

128. Шахунянц, Г. М. Железнодорожный путь: Учеб. для вузов ж.-д. трансп / Г. М. Шахунянц, - Транспорт, 1987. -479 с.

129. Шестаков, А.А. Устойчивость и прочность движения детерминированных динамических систем железнодорожного транспорта / Шестаков А.А., Черкашин Ю.М., Дружинина О.В. // Транспорт: наука, техника, управление. - М.: ВИНТИ РАН, 2003. № 12. С. 10-15

130. Шестаков, В.Н. Влияние демпфирования поперечных колебаний на боковые силы взаимодействия локомотива и пути / В.Н. Шестаков // Вестник ВНИИЖТ, 1978, №4. - С. 17-21.

131. Шеффель, Г. Влияние подвешивания на устойчивость подвижного состава при извилистом движении / Г. Шеффель. // Железные дороги мира. 1981. № 5. С. 10 – 32.

132. Юдакова, Т.А. Улучшение динамических качеств тележки грузового вагона выбором параметров связанности рамы : дисс. канд. техн. наук. – Екатеринбург : УрГУПС -2002 -158 с.
133. Andersson, E. Rail Vehicle Dynamics / E. Andersson, M. Berg, S. Stichel, KTH Royal Institute of Technology, Stockholm, 2013.
134. Ayasse, J Wheel-rail contact / J. Ayasse, H. Chollet, in: S. Iwnicki (Ed.), Handbook of Railway Vehicle Dynamics, Taylor & Francis Group, 2006, pp. 85–120.
135. Carter, F. On the action of a locomotive driving wheel, Proc. R. Soc. London 112 (1926) 151–157.
136. Kalker, J. Three-Dimensional Elastic Bodies in Rolling Contact, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990.
137. Kalker, J. Wheel-rail rolling contact theory, Wear 144 (1991) 243–261.
138. Kik, W. A fast approximate method to calculate normal load at contact between wheel and rail and creep forces during rolling / W. Kik, J. Piotrowski // Proceedings of 2nd Mini-Conference on Contact Mechanics and Wear of Rail/Wheel Systems -1996 338–340
139. Kik, W. Wheel/Rail Connexion-Element for Use in a Multi-Body-Algorithm / W. Kik, H. Steinborn //Dynamics of Vehicles on Roads and Tracks, Proceedings of 8th IAVSD Symposium, Cambridge, MA, USA, -1984, pp. 303–316.
140. Pascal, J The available methods to calculate the wheel/rail forces in non Hertzian contact patches and rail damaging / J. Pascal, G. Sauvage // Vehicle Syst. Dyn. 22 (1993) 263–275
141. Piotrowski, J. A simplified model of wheel/rail contact mechanics for non-Hertzian problems and its application in rail vehicle dynamic simulations / J. Piotrowski, W. Kik // Vehicle Syst. Dyn. 46 (1-2) (2008) 27–48.
142. Popp, K. Ground Vehicle Dynamics / K. Popp K. W.Schiehlen. –Berlin: Springer, 2010. – 350 p
143. Schiehlen, W.O. Dynamics of high-speed vehicles / W.O. Schiehlen // Wien.

–New York: International Centre for Mechanical Sciences Springer-Verlag, 1982. – 399 p.

144. Shen, Z. A comparison of alternative creepforce models for rail vehicle dynamic analysis / Z. Shen, J. Hedrick, J. Elkins // Proceedings of the 8th IAVSD Symposium (1984) 591–605.

145. Ubelacker, G. Untersuchungen uber Bewegung von Lokomotiven mit Drehgestellen in Bahnkrummungen. - Beitrage zum "Organ f.d.F.E.", 1903, B.40, S.1-25.

146. Volf, B. Einfluss der dynamischen Steifigkeit von Eisenbahndrehgestellen auf Fehler von Laufflächen / B. Volf et al. // Eisenbahningenieur, 2000, N 8, S. 50 - 54.

147. Yan, W. Applicability of the hertz contact theory to rail-wheel contact problems / W. Yan, F. D. Fischer // Arch. Appl. Mech. 70 (2000) 255–268.

148. Zhao, X. The solution of frictional wheel-rail rolling contact with a 3D transient finite element model: Validation and error analysis / X. Zhao, Z. Li Wear 271 (1-2) (2011) 444–452.

149. Портал института проблем естественных монополий. Савчук, В. Радиус излома на Совете главных конструкторов / Журнал "Техника железных дорог", № 2 (22), май 2013 URL :

<http://www.ipem.ru/news/publications/642.html> (дата обращения 17.03.2021 г.)

150. Информационный портал Акционерного общества «Торговый дом РЖД» - Конструктивно. Изломов боковых рам пока не избежать, но возможно свести их к минимуму. Статья Олега Сергеенко. 23.01.2014 URL: [http://www.tdrzd.ru/press-center/smi-o-nas/?ELEMENT\\_ID=468](http://www.tdrzd.ru/press-center/smi-o-nas/?ELEMENT_ID=468) (дата обращения 17.03.2021 г.)

151. Стратегия научно-технологического развития холдинга «РЖД» на период до 2025 года и на перспективу до 2030 года (Белая книга) – URL: [http://www.rzd-expo.ru/innovation/sait\\_WB.pdf](http://www.rzd-expo.ru/innovation/sait_WB.pdf) (дата обращения: 13.03.2021)



## ПРИЛОЖЕНИЕ А

*Листинг программы*

```

"Скорость движения";
speed = 33
"Длина участка пути";
trassa = 100
mrange =  $\frac{trassa}{speed}$ ;
"Массово-инерционные характеристики звеньев";
"КП1";
m1 = 1400
Iξ1 = 825
Iη1 = 115
Iζ1 = 825
"КП2";
m2 = 1400
Iξ2 = 825
Iη2 = 115
Iζ2 = 825
"НБ";
m3 = 40000
Iξ3 = 10000
Iη3 = 10000
Iζ3 = 10000
"БЛ";
m4 = 500
Iξ4 = 150
Iη4 = 25
Iζ4 = 160
"БП";
m5 = 500
Iξ5 = 150
Iη5 = 25
Iζ5 = 160
"Смещение центра масс от центра вращения";
ξc1 = 0
ηc1 = 0
ζc1 = 0
ξc2 = 0
ηc2 = 0
ζc2 = 0
ξc3 = 0
ηc3 = 0
ζc3 = 0.5
ξc4 = 0
ηc4 = 0
ζc4 = -0.3
ξc5 = 0

```

$$\mu^5 = 0$$

$$\zeta^5 = -0.3$$

"Расстояние от центра колесной пары 1 до правой буксы";

$$lc1a = 0.9$$

"Расстояние от центра колесной пары 1 до правого переднего колеса";

$$lc1aa = 0.76$$

"Расстояние от центра колесной пары 1 до левой буксы";

$$lc1q = 0.9$$

"Расстояние от центра колесной пары 1 до левого переднего колеса";

$$lc1qq = 0.76$$

"Расстояние от центра колесной пары 2 до правой буксы";

$$lc2e = 0.9$$

"Расстояние от центра колесной пары 2 до правого заднего колеса";

$$lc2ee = 0.76$$

"Расстояние от центра колесной пары 2 до левой буксы";

$$lc2k = 0.9$$

"Расстояние от центра колесной пары 2 до левого заднего колеса";

$$lc2kk = 0.76$$

$$lc3t = 0.5$$

$$lc3u = 0.5$$

$$lc4b = 1.12$$

$$lc4d = 1.12$$

$$lc5n = 1.12$$

$$lc5l = 1.12$$

$$h4 = 0.3$$

$$h5 = 0.3$$

$$Raa = 0.475$$

$$Rqq = 0.475$$

$$Ree = 0.475$$

$$Rkk = 0.475$$

"Неровности пути";

$$\beta^1(t) = 0$$

$$\gamma^1(t) = \text{If}\left[t < \frac{10}{\text{speed}}, -0.0125 \left( \cos\left(\frac{2 \pi \text{speed } t}{10} - \pi\right) + 1 \right), 0\right]$$

$$\beta^2(t) = 0$$

$$\gamma^2(t) = \text{If}\left[\frac{lc4b + lc4d}{\text{speed}} < t < \frac{lc4b + lc4d + 10}{\text{speed}}, -0.0125 \left( \cos\left(\frac{2}{10} \pi \text{speed} \left(t - \frac{lc4b + lc4d}{\text{speed}}\right) - \pi\right) + 1 \right), 0\right]$$

$$\beta^3(t) = 0$$

$$\gamma^3(t) = 0$$

$$\beta^4(t) = 0$$

$$\gamma^4(t) = 0$$

$$\beta^1'(t) = \frac{\partial \beta^1(t)}{\partial t}$$

$$\gamma^1'(t) = \frac{\partial \gamma^1(t)}{\partial t}$$

$$\beta^2'(t) = \frac{\partial \beta^2(t)}{\partial t}$$

$$\gamma^2'(t) = \frac{\partial \gamma^2(t)}{\partial t}$$

$$\beta_3'(t) = \frac{\partial \beta_3(t)}{\partial t}$$

$$\gamma_3'(t) = \frac{\partial \gamma_3(t)}{\partial t}$$

$$\beta_4'(t) = \frac{\partial \beta_4(t)}{\partial t}$$

$$\gamma_4'(t) = \frac{\partial \gamma_4(t)}{\partial t}$$

"Жесткости упругих элементов";

"Жесткость рельса";

$cx1 = 10000$

$cy1 = 5000\ 000$

$cz1 = 50000\ 000$

$cx2 = 10000$

$cy2 = 5000\ 000$

$cz2 = 50000\ 000$

$cx3 = 10000$

$cy3 = 5000\ 000$

$cz3 = 50000\ 000$

$cx4 = 10000$

$cy4 = 5000\ 000$

$cz4 = 50000\ 000$

"Жесткость буксовых адаптеров";

$cx5 = 10000\ 000$

$cy5 = 10000\ 000$

$cz5 = 50000\ 000$

$cx6 = 10000\ 000$

$cy6 = 10000\ 000$

$cz6 = 50000\ 000$

$cx7 = 10000\ 000$

$cy7 = 10000\ 000$

$cz7 = 50000\ 000$

$cx8 = 10000\ 000$

$cy8 = 10000\ 000$

$cz8 = 50000\ 000$

"Жесткости основного рессорного комплекта";

$cx9 = 3000\ 000$

$cy9 = 3000\ 000$

$cz9 = 3000\ 000$

$cx10 = 3000\ 000$

$cy10 = 3000\ 000$

$cz10 = 3000\ 000$

"Дисциплина колесо-рельс";

$ky1 = 20000$

$kz1 = 50000$

$ky2 = 20000$

$kz2 = 50000$

$ky3 = 20000$

$kz3 = 50000$

$k_{y4} = 20000$

$k_{z4} = 50000$

"Диссипация в буксовых адаптерах";

$k_{x12} = 10000$

$k_{y12} = 10000$

$k_{z12} = 10000$

$k_{x22} = 10000$

$k_{y22} = 10000$

$k_{z22} = 10000$

$k_{x32} = 10000$

$k_{y32} = 10000$

$k_{z32} = 10000$

$k_{x42} = 10000$

$k_{y42} = 10000$

$k_{z42} = 10000$

"Коэффициенты трения";

$\mu_{1x} = -0.2$

$\mu_{1y} = -0.2$

$\mu_{1z} = -0.2$

$\mu_{2x} = -0.2$

$\mu_{2y} = -0.2$

$\mu_{2z} = -0.2$

$F_{x1} = 50000$

$F_{y1} = 50000$

$F_{z1} = 50000$

$F_{x2} = 50000$

$F_{y2} = 50000$

$F_{z2} = 50000$

"Main system";

$eqn = \{x1(0) = 0, y1(0) = 0, z1(0) = 0, \varphi1(0) = 0, \phi1(0) = 0, \theta1(0) = 0, x2(0) = 0, y2(0) = 0, z2(0) = 0,$

$\varphi2(0) = 0, \phi2(0) = 0, \theta2(0) = 0, x3(0) = 0, y3(0) = 0, z3(0) = 0, \varphi3(0) = 0, \phi3(0) = 0, \theta3(0) = 0, x4(0) = 0,$

$y4(0) = 0, z4(0) = 0, \varphi4(0) = 0, \phi4(0) = 0, \theta4(0) = 0, x5(0) = 0, y5(0) = 0, z5(0) = 0, \varphi5(0) = 0, \phi5(0) = 0,$

$\theta5(0) = 0, x12(0) = 0, y12(0) = 0, z12(0) = 0, \varphi12(0) = \frac{speed}{Raa}, \phi12(0) = 0, \theta12(0) = 0, x22(0) = 0, y22(0) = 0,$

$z22(0) = 0, \varphi22(0) = \frac{speed}{Ree}, \phi22(0) = 0, \theta22(0) = 0, x32(0) = 0, y32(0) = 0, z32(0) = 0, \varphi32(0) = 0, \phi32(0) = 0,$

$\theta32(0) = 0, x42(0) = 0, y42(0) = 0, z42(0) = 0, \varphi42(0) = 0, \phi42(0) = 0, \theta42(0) = 0, x52(0) = 0, y52(0) = 0,$

$z52(0) = 0, \varphi52(0) = 0, \phi52(0) = 0, \theta52(0) = 0, x1'(t) = x12(t), y1'(t) = y12(t), z1'(t) = z12(t), \varphi1'(t) = \varphi12(t),$

$\phi1'(t) = \phi12(t), \theta1'(t) = \theta12(t), x2'(t) = x22(t), y2'(t) = y22(t), z2'(t) = z22(t), \varphi2'(t) = \varphi22(t), \phi2'(t) = \phi22(t),$

$\theta2'(t) = \theta22(t), x3'(t) = x32(t), y3'(t) = y32(t), z3'(t) = z32(t), \varphi3'(t) = \varphi32(t), \phi3'(t) = \phi32(t), \theta3'(t) = \theta32(t),$

$x4'(t) = x42(t), y4'(t) = y42(t), z4'(t) = z42(t), \varphi4'(t) = \varphi42(t), \phi4'(t) = \phi42(t), \theta4'(t) = \theta42(t), x5'(t) = x52(t),$

$y5'(t) = y52(t), z5'(t) = z52(t), \varphi5'(t) = \varphi52(t), \phi5'(t) = \phi52(t), \theta5'(t) = \theta52(t),$

$x12'(t) = \frac{1}{ml} (-cx5 lc4b + cx5 \cos(\theta4(t)) \cos(\phi4(t)) lc4b - kx12 \cos(\phi4(t)) \sin(\theta4(t)) \theta4'(t) lc4b -$

$kx12 \cos(\theta4(t)) \sin(\phi4(t)) \phi4'(t) lc4b - cx8 lc5n + cx8 lc5n \cos(\theta5(t)) \cos(\phi5(t)) - cx5 lc1a \cos(\theta1(t)) \sin(\phi1(t)) +$

$cx8 lc1q \cos(\theta1(t)) \sin(\phi1(t)) - cx5 x1(t) - cx8 x1(t) + cx5 x4(t) + cx8 x5(t) - kx12 x1'(t) - kx42 x1'(t) +$

$kx12 x4'(t) + kx42 x5'(t) + kx12 lc1a \sin(\theta1(t)) \sin(\phi1(t)) \theta1'(t) - kx42 lc1q \sin(\theta1(t)) \sin(\phi1(t)) \theta1'(t) -$

$kx42 lc5n \cos(\theta5(t)) \sin(\theta5(t)) \theta5'(t) - kx12 lc1a \cos(\theta1(t)) \cos(\phi1(t)) \phi1'(t) + kx42 lc1q \cos(\theta1(t)) \cos(\phi1(t)) \phi1'(t) -$

$kx42 lc5n \cos(\theta5(t)) \sin(\theta5(t)) \theta5'(t),$

$$y_{12}'(t) = \frac{1}{ml} (\text{cy5} \cos(\theta_{1(t)}) \cos(\phi_{1(t)}) \text{lc1a} - \text{lc1a} + \text{lc4b} \cos(\theta_{4(t)}) \sin(\phi_{4(t)}) - y_1(t) + y_4(t)) -$$

$$\text{cy8} \cos(\theta_{1(t)}) \cos(\phi_{1(t)}) \text{lc1q} - \text{lc1q} - \text{lc5n} \cos(\theta_{5(t)}) \sin(\phi_{5(t)}) + y_1(t) - y_5(t) +$$

$$\text{cyl} \cos(\theta_{1(t)}) \cos(\phi_{1(t)}) \text{lc1aa} - \text{lc1aa} - \text{Raa} \sin(\theta_{1(t)}) + \text{Raa} \cos(\theta_{1(t)}) \cos(\phi_{1(t)}) \sin(\theta_{1(t)}) - y_1(t) + \beta_1(t) -$$

$$\text{cy4} \cos(\theta_{1(t)}) \cos(\phi_{1(t)}) \text{lc1qq} - \text{lc1qq} + \text{Rqq} \sin(\theta_{1(t)}) - \text{Rqq} \cos(\theta_{1(t)}) \cos(\phi_{1(t)}) \sin(\theta_{1(t)}) + y_1(t) - \beta_4(t) -$$

$$\text{ky1} (-\text{Raa} \cos(\phi_{1(t)}) \theta_{1}'(t) \cos^2(\theta_{1(t)}) + \text{Raa} \theta_{1}'(t) \cos(\theta_{1(t)}) + \text{lc1aa} \sin(\phi_{1(t)}) \phi_{1}'(t) \cos(\theta_{1(t)}) +$$

$$\text{Raa} \sin(\theta_{1(t)}) \sin(\phi_{1(t)}) \phi_{1}'(t) \cos(\theta_{1(t)}) + y_1'(t) - \beta_1'(t) + \text{Raa} \cos(\phi_{1(t)}) \sin^2(\theta_{1(t)}) \theta_{1}'(t) +$$

$$\text{lc1aa} \cos(\phi_{1(t)}) \sin(\theta_{1(t)}) \theta_{1}'(t)) -$$

$$\text{ky4} (-\text{Rqq} \cos(\phi_{1(t)}) \theta_{1}'(t) \cos^2(\theta_{1(t)}) + \text{Rqq} \theta_{1}'(t) \cos(\theta_{1(t)}) - \text{lc1qq} \sin(\phi_{1(t)}) \phi_{1}'(t) \cos(\theta_{1(t)}) +$$

$$\text{Rqq} \sin(\theta_{1(t)}) \sin(\phi_{1(t)}) \phi_{1}'(t) \cos(\theta_{1(t)}) + y_1'(t) - \beta_4'(t) + \text{Rqq} \cos(\phi_{1(t)}) \sin^2(\theta_{1(t)}) \theta_{1}'(t) -$$

$$\text{lc1qq} \cos(\phi_{1(t)}) \sin(\theta_{1(t)}) \theta_{1}'(t)) -$$

$$\text{ky12} (y_1'(t) - y_4'(t) + \text{lc1a} \cos(\phi_{1(t)}) \sin(\theta_{1(t)}) \theta_{1}'(t) + \text{lc4b} \sin(\theta_{4(t)}) \sin(\phi_{4(t)}) \phi_{4}'(t) +$$

$$\text{lc1a} \cos(\theta_{1(t)}) \sin(\phi_{1(t)}) \phi_{1}'(t) - \text{lc4b} \cos(\theta_{4(t)}) \cos(\phi_{4(t)}) \phi_{4}'(t)) -$$

$$\text{ky42} (y_1'(t) - y_5'(t) - \text{lc1q} \cos(\phi_{1(t)}) \sin(\theta_{1(t)}) \theta_{1}'(t) + \text{lc5n} \sin(\theta_{5(t)}) \sin(\phi_{5(t)}) \phi_{5}'(t) -$$

$$\text{lc1q} \cos(\theta_{1(t)}) \sin(\phi_{1(t)}) \phi_{1}'(t) - \text{lc5n} \cos(\theta_{5(t)}) \cos(\phi_{5(t)}) \phi_{5}'(t)),$$

$$z_{12}'(t) = \frac{1}{ml} (\text{cz1} \text{Raa} \sin^2(\theta_{1(t)}) + \text{cz4} \text{Rqq} \sin^2(\theta_{1(t)}) + \text{cz5} \text{lc1a} \sin(\theta_{1(t)}) + \text{cz1} \text{lc1aa} \sin(\theta_{1(t)}) -$$

$$\text{cz8} \text{lc1q} \sin(\theta_{1(t)}) - \text{cz4} \text{lc1qq} \sin(\theta_{1(t)}) + 2 \text{cz1} \text{Raa} \cos(\theta_{1(t)}) \theta_{1}'(t) \sin(\theta_{1(t)}) + 2 \text{cz4} \text{Rqq} \cos(\theta_{1(t)}) \theta_{1}'(t) \sin(\theta_{1(t)}) -$$

$$\text{cz5} \text{lc4b} \sin(\theta_{4(t)}) - \text{cz8} \text{lc5n} \sin(\theta_{5(t)}) - \text{cz1} z_1(t) - \text{cz4} z_1(t) - \text{cz5} z_1(t) - \text{cz8} z_1(t) + \text{cz5} z_4(t) + \text{cz8} z_5(t) +$$

$$\text{cz1} \gamma_1(t) + \text{cz4} \gamma_4(t) - \text{cz1} z_1'(t) - \text{cz12} z_1'(t) - \text{cz4} z_1'(t) - \text{cz42} z_1'(t) + \text{cz12} z_4'(t) + \text{cz42} z_5'(t) +$$

$$\text{cz1} \gamma_1'(t) + \text{cz4} \gamma_4'(t) + \text{cz12} \text{lc1a} \cos(\theta_{1(t)}) \theta_{1}'(t) + \text{cz1} \text{lc1aa} \cos(\theta_{1(t)}) \theta_{1}'(t) - \text{cz42} \text{lc1q} \cos(\theta_{1(t)}) \theta_{1}'(t) -$$

$$\text{cz4} \text{lc1qq} \cos(\theta_{1(t)}) \theta_{1}'(t) - \text{cz12} \text{lc4b} \cos(\theta_{4(t)}) \phi_{4}'(t) - \text{cz42} \text{lc5n} \cos(\theta_{5(t)}) \phi_{5}'(t)),$$

$$\omega_{12}'(t) = \frac{1}{ml \zeta c^2 + ml \xi c^2 + \text{I} \gamma_1}$$

$$(-ml \cos(\omega_{1(t)}) \sin(\omega_{1(t)}) \theta_{1}'(t)^2 \zeta c^2 + ml \cos^2(\theta_{1(t)}) \cos(\omega_{1(t)}) \sin(\omega_{1(t)}) \phi_{1}'(t)^2 \zeta c^2 -$$

$$ml \cos(\theta_{1(t)}) \cos^2(\omega_{1(t)}) \theta_{1}'(t) \phi_{1}'(t) \zeta c^2 + ml \cos(\theta_{1(t)}) \sin^2(\omega_{1(t)}) \theta_{1}'(t) \phi_{1}'(t) \zeta c^2 -$$

$$ml \cos(\theta_{1(t)}) \theta_{1}'(t) \phi_{1}'(t) \xi c^2 - ml \sin(\theta_{1(t)}) \phi_{12}'(t) \zeta c^2 + ml \xi c^2 \cos(\omega_{1(t)}) \sin(\omega_{1(t)}) \theta_{1}'(t)^2 +$$

$$\text{I} \zeta_1 \cos(\omega_{1(t)}) \sin(\omega_{1(t)}) \theta_{1}'(t)^2 - \text{I} \xi_1 \cos(\omega_{1(t)}) \sin(\omega_{1(t)}) \theta_{1}'(t)^2 - ml \xi c^2 \cos^2(\theta_{1(t)}) \cos(\omega_{1(t)}) \sin(\omega_{1(t)}) \phi_{1}'(t)^2 -$$

$$\text{I} \zeta_1 \cos^2(\theta_{1(t)}) \cos(\omega_{1(t)}) \sin(\omega_{1(t)}) \phi_{1}'(t)^2 + \text{I} \xi_1 \cos^2(\theta_{1(t)}) \cos(\omega_{1(t)}) \sin(\omega_{1(t)}) \phi_{1}'(t)^2 +$$

$$ml \xi c^2 \cos(\theta_{1(t)}) \cos^2(\omega_{1(t)}) \theta_{1}'(t) \phi_{1}'(t) + \text{I} \zeta_1 \cos(\theta_{1(t)}) \cos^2(\omega_{1(t)}) \theta_{1}'(t) \phi_{1}'(t) -$$

$$\text{I} \xi_1 \cos(\theta_{1(t)}) \cos^2(\omega_{1(t)}) \theta_{1}'(t) \phi_{1}'(t) - ml \xi c^2 \cos(\theta_{1(t)}) \sin^2(\omega_{1(t)}) \theta_{1}'(t) \phi_{1}'(t) -$$

$$\text{I} \zeta_1 \cos(\theta_{1(t)}) \sin^2(\omega_{1(t)}) \theta_{1}'(t) \phi_{1}'(t) + \text{I} \xi_1 \cos(\theta_{1(t)}) \sin^2(\omega_{1(t)}) \theta_{1}'(t) \phi_{1}'(t) - ml \xi c^2 \cos(\theta_{1(t)}) \theta_{1}'(t) \phi_{1}'(t) -$$

$$\text{I} \gamma_1 \cos(\theta_{1(t)}) \theta_{1}'(t) \phi_{1}'(t) - ml \xi c^2 \sin(\theta_{1(t)}) \phi_{12}'(t) - \text{I} \gamma_1 \sin(\theta_{1(t)}) \phi_{12}'(t)),$$

$$\phi_{12}'(t) =$$

$$(2 \text{I} \zeta_1 \cos(\omega_{1(t)}) \sin(\omega_{1(t)}) \omega_{1}'(t) \phi_{1}'(t) \cos^2(\theta_{1(t)}) - 2 \text{I} \xi_1 \cos(\omega_{1(t)}) \sin(\omega_{1(t)}) \omega_{1}'(t) \phi_{1}'(t) \cos^2(\theta_{1(t)}) -$$

$$2 ml (\zeta c^2 + \gamma_1) \cos(\omega_{1(t)}) \sin(\omega_{1(t)}) \omega_{1}'(t) \phi_{1}'(t) \cos^2(\theta_{1(t)}) +$$

$$2 ml (\gamma_1 + \xi c^2) \cos(\omega_{1(t)}) \sin(\omega_{1(t)}) \omega_{1}'(t) \phi_{1}'(t) \cos^2(\theta_{1(t)}) -$$

$$\text{cx5} \text{lc1a} \cos(\phi_{1(t)}) (-\cos(\theta_{4(t)}) \cos(\phi_{4(t)}) \text{lc4b} + \text{lc4b} + \text{lc1a} \cos(\theta_{1(t)}) \sin(\phi_{1(t)}) + x_1(t) - x_4(t)) \cos(\theta_{1(t)}) -$$

$$\text{cx8} \text{lc1q} \cos(\phi_{1(t)}) (\cos(\theta_{5(t)}) \cos(\phi_{5(t)}) \text{lc5n} - \text{lc5n} + \text{lc1q} \cos(\theta_{1(t)}) \sin(\phi_{1(t)}) - x_1(t) + x_5(t)) \cos(\theta_{1(t)}) +$$

$$\text{cy5} \text{lc1a} \sin(\phi_{1(t)}) (\cos(\theta_{1(t)}) \cos(\phi_{1(t)}) \text{lc1a} - \text{lc1a} + \text{lc4b} \cos(\theta_{4(t)}) \sin(\phi_{4(t)}) - y_1(t) + y_4(t)) \cos(\theta_{1(t)}) +$$

$$\text{cy8} \text{lc1q} \sin(\phi_{1(t)}) (\cos(\theta_{1(t)}) \cos(\phi_{1(t)}) \text{lc1q} - \text{lc1q} - \text{lc5n} \cos(\theta_{5(t)}) \sin(\phi_{5(t)}) + y_1(t) - y_5(t)) \cos(\theta_{1(t)}) +$$

$$\text{cyl} (\text{lc1aa} + \text{Raa} \sin(\theta_{1(t)})) \sin(\phi_{1(t)})$$

$$(\cos(\theta_{1(t)}) \cos(\phi_{1(t)}) \text{lc1aa} - \text{lc1aa} - \text{Raa} \sin(\theta_{1(t)}) + \text{Raa} \cos(\theta_{1(t)}) \cos(\phi_{1(t)}) \sin(\theta_{1(t)}) - y_1(t) + \beta_1(t)) \cos(\theta_{1(t)}) +$$

$$\text{cy4} (\text{lc1qq} - \text{Rqq} \sin(\theta_{1(t)})) \sin(\phi_{1(t)})$$

$$(\cos(\theta_{1(t)}) \cos(\phi_{1(t)}) \text{lc1qq} - \text{lc1qq} + \text{Rqq} \sin(\theta_{1(t)}) - \text{Rqq} \cos(\theta_{1(t)}) \cos(\phi_{1(t)}) \sin(\theta_{1(t)}) + y_1(t) - \beta_4(t)) \cos(\theta_{1(t)}) -$$

$$\text{I} \zeta_1 \cos(\omega_{1(t)}) \sin(\omega_{1(t)}) \theta_{12}'(t) \cos(\theta_{1(t)}) + \text{I} \xi_1 \cos(\omega_{1(t)}) \sin(\omega_{1(t)}) \theta_{12}'(t) \cos(\theta_{1(t)}) +$$

$$ml (\zeta c^2 + \gamma_1) \cos(\omega_{1(t)}) \sin(\omega_{1(t)}) \theta_{12}'(t) \cos(\theta_{1(t)}) - ml (\gamma_1 + \xi c^2) \cos(\omega_{1(t)}) \sin(\omega_{1(t)}) \theta_{12}'(t) \cos(\theta_{1(t)}) -$$

$$\text{I} \zeta_1 \cos^2(\omega_{1(t)}) \theta_{1}'(t) \omega_{1}'(t) \cos(\theta_{1(t)}) + \text{I} \xi_1 \cos^2(\omega_{1(t)}) \theta_{1}'(t) \omega_{1}'(t) \cos(\theta_{1(t)}) +$$

$$\begin{aligned}
& m1 (\zeta c1^2 + \gamma \pi 1^2) \sin^2(\omega 1(t)) \theta 1'(t) \varphi 1'(t) \cos(\theta 1(t)) + m1 (\gamma \pi 1^2 + \zeta c1^2) \sin^2(\omega 1(t)) \theta 1'(t) \varphi 1'(t) \cos(\theta 1(t)) - \\
& l \beta 1 \theta 1'(t) \varphi 1'(t) \cos(\theta 1(t)) - m1 (\zeta c1^2 + \zeta c1^2) \theta 1'(t) \varphi 1'(t) \cos(\theta 1(t)) + 2 I \zeta 1 \sin(\theta 1(t)) \sin^2(\omega 1(t)) \theta 1'(t) \phi 1'(t) \cos(\theta 1(t)) + \\
& 2 m1 (\zeta c1^2 + \gamma \pi 1^2) \sin(\theta 1(t)) \sin^2(\omega 1(t)) \theta 1'(t) \phi 1'(t) \cos(\theta 1(t)) + 2 I \zeta 1 \cos^2(\omega 1(t)) \sin(\theta 1(t)) \theta 1'(t) \phi 1'(t) \cos(\theta 1(t)) + \\
& 2 m1 (\gamma \pi 1^2 + \zeta c1^2) \cos^2(\omega 1(t)) \sin(\theta 1(t)) \theta 1'(t) \phi 1'(t) \cos(\theta 1(t)) - 2 l \beta 1 \sin(\theta 1(t)) \theta 1'(t) \phi 1'(t) \cos(\theta 1(t)) - \\
& 2 m1 (\zeta c1^2 + \zeta c1^2) \sin(\theta 1(t)) \theta 1'(t) \phi 1'(t) \cos(\theta 1(t)) + \\
& k y 1 (l c 1 a a + R a a \sin(\theta 1(t))) \sin(\phi 1(t)) \\
& (R a a \cos(\phi 1(t)) \theta 1'(t) \cos^2(\theta 1(t)) - R a a \theta 1'(t) \cos(\theta 1(t)) - l c 1 a a \sin(\phi 1(t)) \phi 1'(t) \cos(\theta 1(t)) - \\
& R a a \sin(\theta 1(t)) \sin(\phi 1(t)) \phi 1'(t) \cos(\theta 1(t)) - y 1'(t) + \beta 1'(t) - R a a \cos(\phi 1(t)) \sin^2(\theta 1(t)) \theta 1'(t) - \\
& l c 1 a a \cos(\phi 1(t)) \sin(\theta 1(t)) \theta 1'(t) \cos(\theta 1(t)) - \\
& k y 4 (l c 1 q q - R q q \sin(\theta 1(t))) \sin(\phi 1(t)) \\
& (R q q \cos(\phi 1(t)) \theta 1'(t) \cos^2(\theta 1(t)) - R q q \theta 1'(t) \cos(\theta 1(t)) + l c 1 q q \sin(\phi 1(t)) \phi 1'(t) \cos(\theta 1(t)) - \\
& R q q \sin(\theta 1(t)) \sin(\phi 1(t)) \phi 1'(t) \cos(\theta 1(t)) - y 1'(t) + \beta 4'(t) - R q q \cos(\phi 1(t)) \sin^2(\theta 1(t)) \theta 1'(t) + \\
& l c 1 q q \cos(\phi 1(t)) \sin(\theta 1(t)) \theta 1'(t) \cos(\theta 1(t)) - \\
& k x 1 2 l c 1 a \cos(\phi 1(t)) (x 1'(t) - x 4'(t) - l c 1 a \sin(\theta 1(t)) \sin(\phi 1(t)) \theta 1'(t) + l c 4 b \cos(\theta 4(t)) \sin(\theta 4(t)) \theta 4'(t) + \\
& l c 1 a \cos(\theta 1(t)) \cos(\phi 1(t)) \phi 1'(t) + l c 4 b \cos(\theta 4(t)) \sin(\theta 4(t)) \theta 4'(t) \cos(\theta 1(t)) - \\
& k y 1 2 l c 1 a \sin(\phi 1(t)) (y 1'(t) - y 4'(t) + l c 1 a \cos(\phi 1(t)) \sin(\theta 1(t)) \theta 1'(t) + l c 4 b \sin(\theta 4(t)) \sin(\theta 4(t)) \theta 4'(t) + \\
& l c 1 a \cos(\theta 1(t)) \sin(\phi 1(t)) \phi 1'(t) - l c 4 b \cos(\theta 4(t)) \cos(\theta 4(t)) \theta 4'(t) \cos(\theta 1(t)) - \\
& k y 4 2 l c 1 q \sin(\phi 1(t)) (-y 1'(t) + y 5'(t) + l c 1 q \cos(\phi 1(t)) \sin(\theta 1(t)) \theta 1'(t) - l c 5 n \sin(\theta 5(t)) \sin(\theta 5(t)) \theta 5'(t) + \\
& l c 1 q \cos(\theta 1(t)) \sin(\phi 1(t)) \phi 1'(t) + l c 5 n \cos(\theta 5(t)) \cos(\theta 5(t)) \theta 5'(t) \cos(\theta 1(t)) - \\
& k x 4 2 l c 1 q \cos(\phi 1(t)) (-x 1'(t) + x 5'(t) - l c 1 q \sin(\theta 1(t)) \sin(\phi 1(t)) \theta 1'(t) - l c 5 n \cos(\theta 5(t)) \sin(\theta 5(t)) \theta 5'(t) + \\
& l c 1 q \cos(\theta 1(t)) \cos(\phi 1(t)) \phi 1'(t) - l c 5 n \cos(\theta 5(t)) \sin(\theta 5(t)) \theta 5'(t) \cos(\theta 1(t)) + \\
& I \zeta 1 \cos(\omega 1(t)) \sin(\theta 1(t)) \sin(\omega 1(t)) \theta 1'(t)^2 - I \zeta 1 \cos(\omega 1(t)) \sin(\theta 1(t)) \sin(\omega 1(t)) \theta 1'(t)^2 - \\
& m1 (\zeta c1^2 + \gamma \pi 1^2) \cos(\omega 1(t)) \sin(\theta 1(t)) \sin(\omega 1(t)) \theta 1'(t)^2 + m1 (\gamma \pi 1^2 + \zeta c1^2) \cos(\omega 1(t)) \sin(\theta 1(t)) \sin(\omega 1(t)) \theta 1'(t)^2 - \\
& l \beta 1 \sin(\theta 1(t)) \omega 1 2'(t) - m1 (\zeta c1^2 + \zeta c1^2) \sin(\theta 1(t)) \omega 1 2'(t) / \\
& (m1 \gamma \pi 1^2 \cos^2(\theta 1(t)) \cos^2(\omega 1(t)) + m1 \zeta c1^2 \cos^2(\theta 1(t)) \cos^2(\omega 1(t)) + I \zeta 1 \cos^2(\theta 1(t)) \cos^2(\omega 1(t)) + \\
& m1 \zeta c1^2 \sin^2(\theta 1(t)) + m1 \zeta c1^2 \sin^2(\theta 1(t)) + l \beta 1 \sin^2(\theta 1(t)) + m1 \zeta c1^2 \cos^2(\theta 1(t)) \sin^2(\omega 1(t)) + \\
& m1 \gamma \pi 1^2 \cos^2(\theta 1(t)) \sin^2(\omega 1(t)) + I \zeta 1 \cos^2(\theta 1(t)) \sin^2(\omega 1(t))), \\
\theta 1 2'(t) = & \\
& \left( -I \zeta 1 \cos(\theta 1(t)) \varphi 1'(t) \phi 1'(t) \cos^2(\omega 1(t)) + I \zeta 1 \cos(\theta 1(t)) \varphi 1'(t) \phi 1'(t) \cos^2(\omega 1(t)) + \right. \\
& m1 (\zeta c1^2 + \gamma \pi 1^2) \cos(\theta 1(t)) \varphi 1'(t) \phi 1'(t) \cos^2(\omega 1(t)) - m1 (\gamma \pi 1^2 + \zeta c1^2) \cos(\theta 1(t)) \varphi 1'(t) \phi 1'(t) \cos^2(\omega 1(t)) - \\
& 2 I \zeta 1 \sin(\omega 1(t)) \theta 1'(t) \varphi 1'(t) \cos(\omega 1(t)) + 2 I \zeta 1 \sin(\omega 1(t)) \theta 1'(t) \varphi 1'(t) \cos(\omega 1(t)) + \\
& 2 m1 (\zeta c1^2 + \gamma \pi 1^2) \sin(\omega 1(t)) \theta 1'(t) \varphi 1'(t) \cos(\omega 1(t)) - 2 m1 (\gamma \pi 1^2 + \zeta c1^2) \sin(\omega 1(t)) \theta 1'(t) \varphi 1'(t) \cos(\omega 1(t)) + \\
& I \zeta 1 \sin(\theta 1(t)) \sin(\omega 1(t)) \theta 1'(t) \phi 1'(t) \cos(\omega 1(t)) - I \zeta 1 \sin(\theta 1(t)) \sin(\omega 1(t)) \theta 1'(t) \phi 1'(t) \cos(\omega 1(t)) - \\
& m1 (\zeta c1^2 + \gamma \pi 1^2) \sin(\theta 1(t)) \sin(\omega 1(t)) \theta 1'(t) \phi 1'(t) \cos(\omega 1(t)) + \\
& m1 (\gamma \pi 1^2 + \zeta c1^2) \sin(\theta 1(t)) \sin(\omega 1(t)) \theta 1'(t) \phi 1'(t) \cos(\omega 1(t)) - I \zeta 1 \cos(\theta 1(t)) \sin(\omega 1(t)) \phi 1 2'(t) \cos(\omega 1(t)) + \\
& I \zeta 1 \cos(\theta 1(t)) \sin(\omega 1(t)) \phi 1 2'(t) \cos(\omega 1(t)) + m1 (\zeta c1^2 + \gamma \pi 1^2) \cos(\theta 1(t)) \sin(\omega 1(t)) \phi 1 2'(t) \cos(\omega 1(t)) - \\
& m1 (\gamma \pi 1^2 + \zeta c1^2) \cos(\theta 1(t)) \sin(\omega 1(t)) \phi 1 2'(t) \cos(\omega 1(t)) - \\
& c x 5 l c 1 a \sin(\theta 1(t)) \sin(\phi 1(t)) (-l c 4 b (1 - \cos(\theta 4(t)) \cos(\theta 4(t))) - l c 1 a \cos(\theta 1(t)) \sin(\phi 1(t)) - x 1(t) + x 4(t)) + \\
& c x 8 l c 1 q \sin(\theta 1(t)) \sin(\phi 1(t)) (-l c 5 n (1 - \cos(\theta 5(t)) \cos(\theta 5(t))) + l c 1 q \cos(\theta 1(t)) \sin(\phi 1(t)) - x 1(t) + x 5(t)) + \\
& c y 5 l c 1 a \cos(\phi 1(t)) \sin(\theta 1(t)) (-l c 1 a (1 - \cos(\theta 1(t)) \cos(\phi 1(t))) + l c 4 b \cos(\theta 4(t)) \sin(\theta 4(t)) - y 1(t) + y 4(t)) + \\
& c y 8 l c 1 q \cos(\phi 1(t)) \sin(\theta 1(t)) (-l c 1 q (1 - \cos(\theta 1(t)) \cos(\phi 1(t))) - l c 5 n \cos(\theta 5(t)) \sin(\theta 5(t)) + y 1(t) - y 5(t)) + \\
& c z 5 l c 1 a \cos(\theta 1(t)) (-l c 1 a \sin(\theta 1(t)) + l c 4 b \sin(\theta 4(t)) + z 1(t) - z 4(t)) - \\
& c z 8 l c 1 q \cos(\theta 1(t)) (l c 1 q \sin(\theta 1(t)) + l c 5 n \sin(\theta 5(t)) + z 1(t) - z 5(t)) - \\
& c y 1 (-R a a \cos(\theta 1(t)) (1 - \cos(\theta 1(t)) \cos(\phi 1(t))) - \cos(\phi 1(t)) \sin(\theta 1(t)) (l c 1 a a + R a a \sin(\theta 1(t)))) \\
& (- (1 - \cos(\theta 1(t)) \cos(\phi 1(t))) (l c 1 a a + R a a \sin(\theta 1(t))) - y 1(t) + \beta 1(t)) - \\
& c y 4 (R q q \cos(\theta 1(t)) (1 - \cos(\theta 1(t)) \cos(\phi 1(t))) - \cos(\phi 1(t)) \sin(\theta 1(t)) (l c 1 q q - R q q \sin(\theta 1(t))))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (- (1 - \cos(\theta_1(t)) \cos(\phi_1(t))) (\text{lc1qq} - \text{Rqq} \sin(\theta_1(t))) + \gamma_1(t) - \beta_4(t)) - \\
& \text{cz1} (\text{Raa} \cos(\theta_1(t)) \sin(\theta_1(t)) + \cos(\theta_1(t)) (\text{lc1aa} + \text{Raa} \sin(\theta_1(t)))) (\sin(\theta_1(t)) (\text{lc1aa} + \text{Raa} \sin(\theta_1(t))) - z_1(t) + \gamma_1(t)) - \\
& \text{cz4} (\text{Rqq} \cos(\theta_1(t)) \sin(\theta_1(t)) - \cos(\theta_1(t)) (\text{lc1qq} - \text{Rqq} \sin(\theta_1(t)))) (-\sin(\theta_1(t)) (\text{lc1qq} - \text{Rqq} \sin(\theta_1(t))) - z_1(t) + \gamma_4(t)) + \\
& \text{kz1} (-\text{Raa} \cos(\theta_1(t)) \sin(\theta_1(t)) - \cos(\theta_1(t)) (\text{lc1aa} + \text{Raa} \sin(\theta_1(t)))) \\
& (-z_1'(t) + \gamma_1'(t) + \text{Raa} \cos(\theta_1(t)) \sin(\theta_1(t)) \theta_1'(t) + \cos(\theta_1(t)) (\text{lc1aa} + \text{Raa} \sin(\theta_1(t))) \theta_1'(t)) + \\
& \text{kz4} (\cos(\theta_1(t)) (\text{lc1qq} - \text{Rqq} \sin(\theta_1(t))) - \text{Rqq} \cos(\theta_1(t)) \sin(\theta_1(t))) \\
& (-z_1'(t) + \gamma_4'(t) + \text{Rqq} \cos(\theta_1(t)) \sin(\theta_1(t)) \theta_1'(t) - \cos(\theta_1(t)) (\text{lc1qq} - \text{Rqq} \sin(\theta_1(t))) \theta_1'(t)) - \\
& \text{kz12} \text{lc1a} \cos(\theta_1(t)) (-z_1'(t) + z_4'(t) + \text{lc1a} \cos(\theta_1(t)) \theta_1'(t) - \text{lc4b} \cos(\theta_4(t)) \theta_4'(t)) + \\
& \text{kz42} \text{lc1q} \cos(\theta_1(t)) (-z_1'(t) + z_5'(t) - \text{lc1q} \cos(\theta_1(t)) \theta_1'(t) - \text{lc5n} \cos(\theta_5(t)) \theta_5'(t)) + \\
& \text{Iz1} \cos(\theta_1(t)) \sin^2(\varphi_1(t)) \varphi_1'(t) \phi_1'(t) - \text{Iz1} \cos(\theta_1(t)) \sin^2(\varphi_1(t)) \varphi_1'(t) \phi_1'(t) - \\
& \text{m1} (\zeta c_1^2 + \varkappa c_1^2) \cos(\theta_1(t)) \sin^2(\varphi_1(t)) \varphi_1'(t) \phi_1'(t) + \text{m1} (\varkappa c_1^2 + \xi c_1^2) \cos(\theta_1(t)) \sin^2(\varphi_1(t)) \varphi_1'(t) \phi_1'(t) + \\
& \frac{1}{2} \text{Ipl} (2 \cos(\theta_1(t)) \sin(\theta_1(t)) \phi_1'(t)^2 + 2 \cos(\theta_1(t)) \varphi_1'(t) \phi_1'(t)) + \\
& \frac{1}{2} \text{Iz1} (-2 \cos(\theta_1(t)) \cos^2(\varphi_1(t)) \sin(\theta_1(t)) \phi_1'(t)^2 - 2 \cos(\varphi_1(t)) \sin(\theta_1(t)) \sin(\varphi_1(t)) \theta_1'(t) \phi_1'(t)) + \\
& \frac{1}{2} \text{Iz1} (2 \cos(\varphi_1(t)) \sin(\theta_1(t)) \sin(\varphi_1(t)) \theta_1'(t) \phi_1'(t) - 2 \cos(\theta_1(t)) \sin(\theta_1(t)) \sin^2(\varphi_1(t)) \phi_1'(t)^2) + \\
& \text{ky4} (\text{Rqq} \cos(\theta_1(t)) (1 - \cos(\theta_1(t)) \cos(\phi_1(t))) - \cos(\phi_1(t)) \sin(\theta_1(t)) (\text{lc1qq} - \text{Rqq} \sin(\theta_1(t)))) \\
& (-y_1'(t) + \beta_4'(t) - \text{Rqq} \cos(\theta_1(t)) (1 - \cos(\theta_1(t)) \cos(\phi_1(t))) \theta_1'(t) + \\
& (\text{lc1qq} - \text{Rqq} \sin(\theta_1(t))) (\cos(\phi_1(t)) \sin(\theta_1(t)) \theta_1'(t) + \cos(\theta_1(t)) \sin(\phi_1(t)) \phi_1'(t))) + \\
& \text{ky1} (\text{Raa} \cos(\theta_1(t)) (1 - \cos(\theta_1(t)) \cos(\phi_1(t))) + \cos(\phi_1(t)) \sin(\theta_1(t)) (\text{lc1aa} + \text{Raa} \sin(\theta_1(t)))) \\
& (-y_1'(t) + \beta_1'(t) - \text{Raa} \cos(\theta_1(t)) (1 - \cos(\theta_1(t)) \cos(\phi_1(t))) \theta_1'(t) - \\
& (\text{lc1aa} + \text{Raa} \sin(\theta_1(t))) (\cos(\phi_1(t)) \sin(\theta_1(t)) \theta_1'(t) + \cos(\theta_1(t)) \sin(\phi_1(t)) \phi_1'(t))) + \\
& \frac{1}{2} \text{m1} ((\zeta c_1^2 + \xi c_1^2) (2 \cos(\theta_1(t)) \sin(\theta_1(t)) \phi_1'(t)^2 + 2 \cos(\theta_1(t)) \varphi_1'(t) \phi_1'(t)) + \\
& (\varkappa c_1^2 + \xi c_1^2) (-2 \cos(\theta_1(t)) \cos^2(\varphi_1(t)) \sin(\theta_1(t)) \phi_1'(t)^2 - 2 \cos(\varphi_1(t)) \sin(\theta_1(t)) \sin(\varphi_1(t)) \theta_1'(t) \phi_1'(t)) + \\
& (\zeta c_1^2 + \varkappa c_1^2) (2 \cos(\varphi_1(t)) \sin(\theta_1(t)) \sin(\varphi_1(t)) \theta_1'(t) \phi_1'(t) - 2 \cos(\theta_1(t)) \sin(\theta_1(t)) \sin^2(\varphi_1(t)) \phi_1'(t)^2)) + \\
& \text{ky12} \text{lc1a} \cos(\phi_1(t)) \sin(\theta_1(t)) \\
& (-y_1'(t) + y_4'(t) - \text{lc4b} \sin(\theta_4(t)) \sin(\phi_4(t)) \theta_4'(t) - \text{lc1a} (\cos(\phi_1(t)) \sin(\theta_1(t)) \theta_1'(t) + \cos(\theta_1(t)) \sin(\phi_1(t)) \phi_1'(t)) + \\
& \text{lc4b} \cos(\theta_4(t)) \cos(\phi_4(t)) \phi_4'(t)) - \\
& \text{kx12} \text{lc1a} \sin(\theta_1(t)) \sin(\phi_1(t)) \\
& (-x_1'(t) + x_4'(t) + \text{lc1a} \sin(\theta_1(t)) \sin(\phi_1(t)) \theta_1'(t) - \text{lc1a} \cos(\theta_1(t)) \cos(\phi_1(t)) \phi_1'(t) - \\
& \text{lc4b} (\cos(\phi_4(t)) \sin(\theta_4(t)) \theta_4'(t) + \cos(\theta_4(t)) \sin(\phi_4(t)) \phi_4'(t))) - \\
& \text{ky42} \text{lc1q} \cos(\phi_1(t)) \sin(\theta_1(t)) \\
& (-y_1'(t) + y_5'(t) - \text{lc5n} \sin(\theta_5(t)) \sin(\phi_5(t)) \theta_5'(t) + \text{lc1q} (\cos(\phi_1(t)) \sin(\theta_1(t)) \theta_1'(t) + \cos(\theta_1(t)) \sin(\phi_1(t)) \phi_1'(t)) + \\
& \text{lc5n} \cos(\theta_5(t)) \cos(\phi_5(t)) \phi_5'(t)) + \\
& \text{kx42} \text{lc1q} \sin(\theta_1(t)) \sin(\phi_1(t)) \\
& (-x_1'(t) + x_5'(t) - \text{lc1q} \sin(\theta_1(t)) \sin(\phi_1(t)) \theta_1'(t) + \text{lc1q} \cos(\theta_1(t)) \cos(\phi_1(t)) \phi_1'(t) - \\
& \text{lc5n} (\cos(\phi_5(t)) \sin(\theta_5(t)) \theta_5'(t) + \cos(\theta_5(t)) \sin(\phi_5(t)) \phi_5'(t))) \Big) / \\
& (\text{Iz1} \cos^2(\varphi_1(t)) + \text{m1} (\zeta c_1^2 + \varkappa c_1^2) \cos^2(\varphi_1(t)) + \text{Iz1} \sin^2(\varphi_1(t)) + \text{m1} (\varkappa c_1^2 + \xi c_1^2) \sin^2(\varphi_1(t))), \\
& \text{x22}'(t) = \frac{1}{\text{m2}} (\text{cx6} \text{lc4d} - \text{cx6} \cos(\theta_4(t)) \cos(\phi_4(t)) \text{lc4d} + \text{kx22} \cos(\phi_4(t)) \sin(\theta_4(t)) \theta_4'(t) \text{lc4d} + \\
& \text{kx22} \cos(\theta_4(t)) \sin(\phi_4(t)) \phi_4'(t) \text{lc4d} + \text{cx7} \text{lc51} - \text{cx7} \text{lc51} \cos(\theta_5(t)) \cos(\phi_5(t)) - \text{cx6} \text{lc2e} \cos(\theta_2(t)) \sin(\phi_2(t)) + \\
& \text{cx7} \text{lc2k} \cos(\theta_2(t)) \sin(\phi_2(t)) - \text{cx6} x_2'(t) - \text{cx7} x_2'(t) + \text{cx6} x_4'(t) + \text{cx7} x_5'(t) - \text{kx22} x_2'(t) - \text{kx32} x_2'(t) + \\
& \text{kx22} x_4'(t) + \text{kx32} x_5'(t) + \text{kx22} \text{lc2e} \sin(\theta_2(t)) \sin(\phi_2(t)) \theta_2'(t) - \text{kx32} \text{lc2k} \sin(\theta_2(t)) \sin(\phi_2(t)) \theta_2'(t) + \\
& \text{kx32} \text{lc51} \cos(\phi_5(t)) \sin(\theta_5(t)) \theta_5'(t) - \text{kx22} \text{lc2e} \cos(\theta_2(t)) \cos(\phi_2(t)) \phi_2'(t) + \text{kx32} \text{lc2k} \cos(\theta_2(t)) \cos(\phi_2(t)) \phi_2'(t) + \\
& \text{kx32} \text{lc51} \cos(\theta_5(t)) \sin(\phi_5(t)) \phi_5'(t)),
\end{aligned}$$

$$y_{22}'(t) = \frac{1}{m_2} (\text{cy}_6 (\cos(\theta_2(t)) \cos(\phi_2(t)) \text{lc}2\text{e} - \text{lc}2\text{e} - \text{lc}4\text{d} \cos(\theta_4(t)) \sin(\phi_4(t)) - y_2(t) + y_4(t)) -$$

$$\text{cy}_7 (\cos(\theta_2(t)) \cos(\phi_2(t)) \text{lc}2\text{k} - \text{lc}2\text{k} + \text{lc}5\text{l} \cos(\theta_5(t)) \sin(\phi_5(t)) + y_2(t) - y_5(t)) +$$

$$\text{cy}_2 (\cos(\theta_2(t)) \cos(\phi_2(t)) \text{lc}2\text{ee} - \text{lc}2\text{ee} - \text{Ree} \sin(\theta_2(t)) + \text{Ree} \cos(\theta_2(t)) \cos(\phi_2(t)) \sin(\theta_2(t)) - y_2(t) + \beta_2(t)) -$$

$$\text{cy}_3 (\cos(\theta_2(t)) \cos(\phi_2(t)) \text{lc}2\text{kk} - \text{lc}2\text{kk} + \text{Rkk} \sin(\theta_2(t)) - \text{Rkk} \cos(\theta_2(t)) \cos(\phi_2(t)) \sin(\theta_2(t)) + y_2(t) - \beta_3(t)) -$$

$$\text{ky}_2 (-\text{Ree} \cos(\phi_2(t)) \theta_2'(t) \cos^2(\theta_2(t)) + \text{Ree} \theta_2'(t) \cos(\theta_2(t)) + \text{lc}2\text{ee} \sin(\phi_2(t)) \phi_2'(t) \cos(\theta_2(t)) +$$

$$\text{Ree} \sin(\theta_2(t)) \sin(\phi_2(t)) \phi_2'(t) \cos(\theta_2(t)) + y_2'(t) - \beta_2'(t) + \text{Ree} \cos(\phi_2(t)) \sin^2(\theta_2(t)) \theta_2'(t) +$$

$$\text{lc}2\text{ee} \cos(\phi_2(t)) \sin(\theta_2(t)) \theta_2'(t)) -$$

$$\text{ky}_3 (-\text{Rkk} \cos(\phi_2(t)) \theta_2'(t) \cos^2(\theta_2(t)) + \text{Rkk} \theta_2'(t) \cos(\theta_2(t)) - \text{lc}2\text{kk} \sin(\phi_2(t)) \phi_2'(t) \cos(\theta_2(t)) +$$

$$\text{Rkk} \sin(\theta_2(t)) \sin(\phi_2(t)) \phi_2'(t) \cos(\theta_2(t)) + y_2'(t) - \beta_3'(t) + \text{Rkk} \cos(\phi_2(t)) \sin^2(\theta_2(t)) \theta_2'(t) -$$

$$\text{lc}2\text{kk} \cos(\phi_2(t)) \sin(\theta_2(t)) \theta_2'(t)) -$$

$$\text{ky}_{22} (y_2'(t) - y_4'(t) + \text{lc}2\text{e} \cos(\phi_2(t)) \sin(\theta_2(t)) \theta_2'(t) - \text{lc}4\text{d} \sin(\theta_4(t)) \sin(\phi_4(t)) \phi_4'(t) +$$

$$\text{lc}2\text{e} \cos(\theta_2(t)) \sin(\phi_2(t)) \phi_2'(t) + \text{lc}4\text{d} \cos(\theta_4(t)) \cos(\phi_4(t)) \phi_4'(t)) -$$

$$\text{ky}_{32} (y_2'(t) - y_5'(t) - \text{lc}2\text{k} \cos(\phi_2(t)) \sin(\theta_2(t)) \theta_2'(t) - \text{lc}5\text{l} \sin(\theta_5(t)) \sin(\phi_5(t)) \phi_5'(t) -$$

$$\text{lc}2\text{k} \cos(\theta_2(t)) \sin(\phi_2(t)) \phi_2'(t) + \text{lc}5\text{l} \cos(\theta_5(t)) \cos(\phi_5(t)) \phi_5'(t)),$$

$$z_{22}'(t) = \frac{1}{m_2} (\text{cz}_2 \text{Ree} \sin^2(\theta_2(t)) + \text{cz}_3 \text{Rkk} \sin^2(\theta_2(t)) + \text{cz}_6 \text{lc}2\text{e} \sin(\theta_2(t)) + \text{cz}_2 \text{lc}2\text{ee} \sin(\theta_2(t)) -$$

$$\text{cz}_7 \text{lc}2\text{k} \sin(\theta_2(t)) - \text{cz}_3 \text{lc}2\text{kk} \sin(\theta_2(t)) + 2 \text{kz}_2 \text{Ree} \cos(\theta_2(t)) \theta_2'(t) \sin(\theta_2(t)) + 2 \text{kz}_3 \text{Rkk} \cos(\theta_2(t)) \theta_2'(t) \sin(\theta_2(t)) +$$

$$\text{cz}_6 \text{lc}4\text{d} \sin(\theta_4(t)) + \text{cz}_7 \text{lc}5\text{l} \sin(\theta_5(t)) - \text{cz}_2 z_2(t) - \text{cz}_3 z_2(t) - \text{cz}_6 z_2(t) - \text{cz}_7 z_2(t) + \text{cz}_6 z_4(t) + \text{cz}_7 z_5(t) +$$

$$\text{cz}_2 \gamma_2(t) + \text{cz}_3 \gamma_3(t) - \text{kz}_2 z_2'(t) - \text{kz}_{22} z_2'(t) - \text{kz}_3 z_2'(t) - \text{kz}_{32} z_2'(t) + \text{kz}_{22} z_4'(t) + \text{kz}_{32} z_5'(t) +$$

$$\text{kz}_2 \gamma_2'(t) + \text{kz}_3 \gamma_3'(t) + \text{kz}_{22} \text{lc}2\text{e} \cos(\theta_2(t)) \theta_2'(t) + \text{kz}_2 \text{lc}2\text{ee} \cos(\theta_2(t)) \theta_2'(t) - \text{kz}_{32} \text{lc}2\text{k} \cos(\theta_2(t)) \theta_2'(t) -$$

$$\text{kz}_3 \text{lc}2\text{kk} \cos(\theta_2(t)) \theta_2'(t) + \text{kz}_{22} \text{lc}4\text{d} \cos(\theta_4(t)) \phi_4'(t) + \text{kz}_{32} \text{lc}5\text{l} \cos(\theta_5(t)) \phi_5'(t)),$$

$$\varphi_{22}'(t) = \frac{1}{m_2 \zeta c^2 + m_2 \xi c^2 + \text{I}\rho}$$

$$(-m_2 \cos(\varphi_2(t)) \sin(\varphi_2(t)) \theta_2'(t)^2 \zeta c^2 + m_2 \cos^2(\theta_2(t)) \cos(\varphi_2(t)) \sin(\varphi_2(t)) \phi_2'(t)^2 \zeta c^2 -$$

$$m_2 \cos(\theta_2(t)) \cos^2(\varphi_2(t)) \theta_2'(t) \phi_2'(t) \zeta c^2 + m_2 \cos(\theta_2(t)) \sin^2(\varphi_2(t)) \theta_2'(t) \phi_2'(t) \zeta c^2 -$$

$$m_2 \cos(\theta_2(t)) \theta_2'(t) \phi_2'(t) \xi c^2 - m_2 \sin(\theta_2(t)) \phi_{22}'(t) \zeta c^2 + m_2 \xi c^2 \cos(\varphi_2(t)) \sin(\varphi_2(t)) \theta_2'(t)^2 +$$

$$\text{I}\xi^2 \cos(\varphi_2(t)) \sin(\varphi_2(t)) \theta_2'(t)^2 - \text{I}\xi^2 \cos(\varphi_2(t)) \sin(\varphi_2(t)) \theta_2'(t)^2 - m_2 \xi c^2 \cos^2(\theta_2(t)) \cos(\varphi_2(t)) \sin(\varphi_2(t)) \phi_2'(t)^2 -$$

$$\text{I}\xi^2 \cos^2(\theta_2(t)) \cos(\varphi_2(t)) \sin(\varphi_2(t)) \phi_2'(t)^2 + \text{I}\xi^2 \cos^2(\theta_2(t)) \cos(\varphi_2(t)) \sin(\varphi_2(t)) \phi_2'(t)^2 +$$

$$m_2 \xi c^2 \cos(\theta_2(t)) \cos^2(\varphi_2(t)) \theta_2'(t) \phi_2'(t) + \text{I}\xi^2 \cos(\theta_2(t)) \cos^2(\varphi_2(t)) \theta_2'(t) \phi_2'(t) -$$

$$\text{I}\xi^2 \cos(\theta_2(t)) \cos^2(\varphi_2(t)) \theta_2'(t) \phi_2'(t) - m_2 \xi c^2 \cos(\theta_2(t)) \sin^2(\varphi_2(t)) \theta_2'(t) \phi_2'(t) -$$

$$\text{I}\xi^2 \cos(\theta_2(t)) \sin^2(\varphi_2(t)) \theta_2'(t) \phi_2'(t) + \text{I}\xi^2 \cos(\theta_2(t)) \sin^2(\varphi_2(t)) \theta_2'(t) \phi_2'(t) - m_2 \xi c^2 \cos(\theta_2(t)) \theta_2'(t) \phi_2'(t) -$$

$$\text{I}\rho \cos(\theta_2(t)) \theta_2'(t) \phi_2'(t) - m_2 \xi c^2 \sin(\theta_2(t)) \phi_{22}'(t) - \text{I}\rho \sin(\theta_2(t)) \phi_{22}'(t)),$$

$$\phi_{22}'(t) =$$

$$(2 \text{I}\xi^2 \cos(\varphi_2(t)) \sin(\varphi_2(t)) \varphi_2'(t) \phi_2'(t) \cos^2(\theta_2(t)) - 2 \text{I}\xi^2 \cos(\varphi_2(t)) \sin(\varphi_2(t)) \varphi_2'(t) \phi_2'(t) \cos^2(\theta_2(t)) -$$

$$2 m_2 (\zeta c^2 + \rho c^2) \cos(\varphi_2(t)) \sin(\varphi_2(t)) \varphi_2'(t) \phi_2'(t) \cos^2(\theta_2(t)) +$$

$$2 m_2 (\rho c^2 + \xi c^2) \cos(\varphi_2(t)) \sin(\varphi_2(t)) \varphi_2'(t) \phi_2'(t) \cos^2(\theta_2(t)) -$$

$$\text{cx}_6 \text{lc}2\text{e} \cos(\phi_2(t)) (\cos(\theta_4(t)) \cos(\phi_4(t)) \text{lc}4\text{d} - \text{lc}4\text{d} + \text{lc}2\text{e} \cos(\theta_2(t)) \sin(\phi_2(t)) + x_2(t) - x_4(t)) \cos(\theta_2(t)) -$$

$$\text{cx}_7 \text{lc}2\text{k} \cos(\phi_2(t)) (-\cos(\theta_5(t)) \cos(\phi_5(t)) \text{lc}5\text{l} + \text{lc}5\text{l} + \text{lc}2\text{k} \cos(\theta_2(t)) \sin(\phi_2(t)) - x_2(t) + x_5(t)) \cos(\theta_2(t)) +$$

$$\text{cy}_6 \text{lc}2\text{e} \sin(\phi_2(t)) (\cos(\theta_2(t)) \cos(\phi_2(t)) \text{lc}2\text{e} - \text{lc}2\text{e} - \text{lc}4\text{d} \cos(\theta_4(t)) \sin(\phi_4(t)) - y_2(t) + y_4(t)) \cos(\theta_2(t)) +$$

$$\text{cy}_7 \text{lc}2\text{k} \sin(\phi_2(t)) (\cos(\theta_2(t)) \cos(\phi_2(t)) \text{lc}2\text{k} - \text{lc}2\text{k} + \text{lc}5\text{l} \cos(\theta_5(t)) \sin(\phi_5(t)) + y_2(t) - y_5(t)) \cos(\theta_2(t)) +$$

$$\text{cy}_2 (\text{lc}2\text{ee} + \text{Ree} \sin(\theta_2(t))) \sin(\phi_2(t))$$

$$(\cos(\theta_2(t)) \cos(\phi_2(t)) \text{lc}2\text{ee} - \text{lc}2\text{ee} - \text{Ree} \sin(\theta_2(t)) + \text{Ree} \cos(\theta_2(t)) \cos(\phi_2(t)) \sin(\theta_2(t)) - y_2(t) + \beta_2(t)) \cos(\theta_2(t)) +$$

$$\text{cy}_3 (\text{lc}2\text{kk} - \text{Rkk} \sin(\theta_2(t))) \sin(\phi_2(t))$$

$$(\cos(\theta_2(t)) \cos(\phi_2(t)) \text{lc}2\text{kk} - \text{lc}2\text{kk} + \text{Rkk} \sin(\theta_2(t)) - \text{Rkk} \cos(\theta_2(t)) \cos(\phi_2(t)) \sin(\theta_2(t)) + y_2(t) - \beta_3(t)) \cos(\theta_2(t)) -$$

$$\text{I}\xi^2 \cos(\varphi_2(t)) \sin(\varphi_2(t)) \theta_{22}'(t) \cos(\theta_2(t)) + \text{I}\xi^2 \cos(\varphi_2(t)) \sin(\varphi_2(t)) \theta_{22}'(t) \cos(\theta_2(t)) +$$

$$m_2 (\zeta c^2 + \rho c^2) \cos(\varphi_2(t)) \sin(\varphi_2(t)) \theta_{22}'(t) \cos(\theta_2(t)) - m_2 (\rho c^2 + \xi c^2) \cos(\varphi_2(t)) \sin(\varphi_2(t)) \theta_{22}'(t) \cos(\theta_2(t)) -$$

$$\text{I}\xi^2 \cos^2(\varphi_2(t)) \theta_2'(t) \varphi_2'(t) \cos(\theta_2(t)) + \text{I}\xi^2 \cos^2(\varphi_2(t)) \theta_2'(t) \varphi_2'(t) \cos(\theta_2(t)) +$$



$$\begin{aligned}
& m2(\zeta c2^2 + \gamma \kappa 2^2) \cos^2(\varphi 2(t)) \theta 2'(t) \varphi 2'(t) \cos(\theta 2(t)) - m2(\gamma \kappa 2^2 + \xi c2^2) \cos^2(\varphi 2(t)) \theta 2'(t) \varphi 2'(t) \cos(\theta 2(t)) + \\
& I\zeta 2 \sin^2(\varphi 2(t)) \theta 2'(t) \varphi 2'(t) \cos(\theta 2(t)) - I\zeta 2 \sin^2(\varphi 2(t)) \theta 2'(t) \varphi 2'(t) \cos(\theta 2(t)) - \\
& m2(\zeta c2^2 + \gamma \kappa 2^2) \sin^2(\varphi 2(t)) \theta 2'(t) \varphi 2'(t) \cos(\theta 2(t)) + m2(\gamma \kappa 2^2 + \xi c2^2) \sin^2(\varphi 2(t)) \theta 2'(t) \varphi 2'(t) \cos(\theta 2(t)) - \\
& I\gamma 2 \theta 2'(t) \varphi 2'(t) \cos(\theta 2(t)) - m2(\zeta c2^2 + \xi c2^2) \theta 2'(t) \varphi 2'(t) \cos(\theta 2(t)) + 2 I\zeta 2 \sin(\theta 2(t)) \sin^2(\varphi 2(t)) \theta 2'(t) \phi 2'(t) \cos(\theta 2(t)) + \\
& 2 m2(\zeta c2^2 + \gamma \kappa 2^2) \sin(\theta 2(t)) \sin^2(\varphi 2(t)) \theta 2'(t) \phi 2'(t) \cos(\theta 2(t)) + 2 I\zeta 2 \cos^2(\varphi 2(t)) \sin(\theta 2(t)) \theta 2'(t) \phi 2'(t) \cos(\theta 2(t)) + \\
& 2 m2(\gamma \kappa 2^2 + \xi c2^2) \cos^2(\varphi 2(t)) \sin(\theta 2(t)) \theta 2'(t) \phi 2'(t) \cos(\theta 2(t)) - 2 I\gamma 2 \sin(\theta 2(t)) \theta 2'(t) \phi 2'(t) \cos(\theta 2(t)) - \\
& 2 m2(\zeta c2^2 + \xi c2^2) \sin(\theta 2(t)) \theta 2'(t) \phi 2'(t) \cos(\theta 2(t)) + \\
& ky2(lc2ee + Ree \sin(\theta 2(t))) \sin(\phi 2(t)) \\
& (Ree \cos(\phi 2(t)) \theta 2'(t) \cos^2(\theta 2(t)) - Ree \theta 2'(t) \cos(\theta 2(t)) - lc2ee \sin(\phi 2(t)) \phi 2'(t) \cos(\theta 2(t)) - \\
& Ree \sin(\theta 2(t)) \sin(\phi 2(t)) \phi 2'(t) \cos(\theta 2(t)) - y2'(t) + \beta 2'(t) - Ree \cos(\phi 2(t)) \sin^2(\theta 2(t)) \theta 2'(t) - \\
& lc2ee \cos(\phi 2(t)) \sin(\theta 2(t)) \theta 2'(t) \cos(\theta 2(t)) - \\
& ky3(lc2kk - Rkk \sin(\theta 2(t))) \sin(\phi 2(t)) \\
& (Rkk \cos(\phi 2(t)) \theta 2'(t) \cos^2(\theta 2(t)) - Rkk \theta 2'(t) \cos(\theta 2(t)) + lc2kk \sin(\phi 2(t)) \phi 2'(t) \cos(\theta 2(t)) - \\
& Rkk \sin(\theta 2(t)) \sin(\phi 2(t)) \phi 2'(t) \cos(\theta 2(t)) - y2'(t) + \beta 3'(t) - Rkk \cos(\phi 2(t)) \sin^2(\theta 2(t)) \theta 2'(t) + \\
& lc2kk \cos(\phi 2(t)) \sin(\theta 2(t)) \theta 2'(t) \cos(\theta 2(t)) - \\
& ky22 lc2e \sin(\phi 2(t)) (y2'(t) - y4'(t) + lc2e \cos(\phi 2(t)) \sin(\theta 2(t)) \theta 2'(t) - lc4d \sin(\theta 4(t)) \sin(\phi 4(t)) \theta 4'(t) + \\
& lc2e \cos(\theta 2(t)) \sin(\phi 2(t)) \phi 2'(t) + lc4d \cos(\theta 4(t)) \cos(\phi 4(t)) \phi 4'(t) \cos(\theta 2(t)) - \\
& kx22 lc2e \cos(\phi 2(t)) (x2'(t) - x4'(t) - lc2e \sin(\theta 2(t)) \sin(\phi 2(t)) \theta 2'(t) - lc4d \cos(\theta 4(t)) \sin(\theta 4(t)) \theta 4'(t) + \\
& lc2e \cos(\theta 2(t)) \cos(\phi 2(t)) \phi 2'(t) - lc4d \cos(\theta 4(t)) \sin(\phi 4(t)) \phi 4'(t) \cos(\theta 2(t)) - \\
& kx32 lc2k \cos(\phi 2(t)) (-x2'(t) + x5'(t) - lc2k \sin(\theta 2(t)) \sin(\phi 2(t)) \theta 2'(t) + lc5l \cos(\theta 5(t)) \sin(\theta 5(t)) \theta 5'(t) + \\
& lc2k \cos(\theta 2(t)) \cos(\phi 2(t)) \phi 2'(t) + lc5l \cos(\theta 5(t)) \sin(\theta 5(t)) \phi 5'(t) \cos(\theta 2(t)) - \\
& ky32 lc2k \sin(\phi 2(t)) (-y2'(t) + y5'(t) + lc2k \cos(\phi 2(t)) \sin(\theta 2(t)) \theta 2'(t) + lc5l \sin(\theta 5(t)) \sin(\theta 5(t)) \theta 5'(t) + \\
& lc2k \cos(\theta 2(t)) \sin(\phi 2(t)) \phi 2'(t) - lc5l \cos(\theta 5(t)) \cos(\theta 5(t)) \phi 5'(t) \cos(\theta 2(t)) + \\
& I\zeta 2 \cos(\varphi 2(t)) \sin(\theta 2(t)) \sin(\varphi 2(t)) \theta 2'(t)^2 - I\zeta 2 \cos(\varphi 2(t)) \sin(\theta 2(t)) \sin(\varphi 2(t)) \theta 2'(t)^2 - \\
& m2(\zeta c2^2 + \gamma \kappa 2^2) \cos(\varphi 2(t)) \sin(\theta 2(t)) \sin(\varphi 2(t)) \theta 2'(t)^2 + m2(\gamma \kappa 2^2 + \xi c2^2) \cos(\varphi 2(t)) \sin(\theta 2(t)) \sin(\varphi 2(t)) \theta 2'(t)^2 - \\
& I\gamma 2 \sin(\theta 2(t)) \varphi 22'(t) - m2(\zeta c2^2 + \xi c2^2) \sin(\theta 2(t)) \varphi 22'(t) / \\
& (m2 \gamma \kappa 2^2 \cos^2(\theta 2(t)) \cos^2(\varphi 2(t)) + m2 \xi c2^2 \cos^2(\theta 2(t)) \cos^2(\varphi 2(t)) + I\zeta 2 \cos^2(\theta 2(t)) \cos^2(\varphi 2(t)) + \\
& m2 \zeta c2^2 \sin^2(\theta 2(t)) + m2 \xi c2^2 \sin^2(\theta 2(t)) + I\gamma 2 \sin^2(\theta 2(t)) + m2 \zeta c2^2 \cos^2(\theta 2(t)) \sin^2(\varphi 2(t)) + \\
& m2 \gamma \kappa 2^2 \cos^2(\theta 2(t)) \sin^2(\varphi 2(t)) + I\zeta 2 \cos^2(\theta 2(t)) \sin^2(\varphi 2(t))), \\
\theta 22'(t) = & \\
& \left( -I\zeta 2 \cos(\theta 2(t)) \varphi 2'(t) \phi 2'(t) \cos^2(\varphi 2(t)) + I\zeta 2 \cos(\theta 2(t)) \varphi 2'(t) \phi 2'(t) \cos^2(\varphi 2(t)) + \right. \\
& m2(\zeta c2^2 + \gamma \kappa 2^2) \cos(\theta 2(t)) \varphi 2'(t) \phi 2'(t) \cos^2(\varphi 2(t)) - m2(\gamma \kappa 2^2 + \xi c2^2) \cos(\theta 2(t)) \varphi 2'(t) \phi 2'(t) \cos^2(\varphi 2(t)) - \\
& 2 I\zeta 2 \sin(\varphi 2(t)) \theta 2'(t) \varphi 2'(t) \cos(\varphi 2(t)) + 2 I\zeta 2 \sin(\varphi 2(t)) \theta 2'(t) \varphi 2'(t) \cos(\varphi 2(t)) + \\
& 2 m2(\zeta c2^2 + \gamma \kappa 2^2) \sin(\varphi 2(t)) \theta 2'(t) \varphi 2'(t) \cos(\varphi 2(t)) - 2 m2(\gamma \kappa 2^2 + \xi c2^2) \sin(\varphi 2(t)) \theta 2'(t) \varphi 2'(t) \cos(\varphi 2(t)) + \\
& I\zeta 2 \sin(\theta 2(t)) \sin(\varphi 2(t)) \theta 2'(t) \phi 2'(t) \cos(\varphi 2(t)) - I\zeta 2 \sin(\theta 2(t)) \sin(\varphi 2(t)) \theta 2'(t) \phi 2'(t) \cos(\varphi 2(t)) - \\
& m2(\zeta c2^2 + \gamma \kappa 2^2) \sin(\theta 2(t)) \sin(\varphi 2(t)) \theta 2'(t) \phi 2'(t) \cos(\varphi 2(t)) + \\
& m2(\gamma \kappa 2^2 + \xi c2^2) \sin(\theta 2(t)) \sin(\varphi 2(t)) \theta 2'(t) \phi 2'(t) \cos(\varphi 2(t)) - I\zeta 2 \cos(\theta 2(t)) \sin(\varphi 2(t)) \phi 22'(t) \cos(\varphi 2(t)) + \\
& I\zeta 2 \cos(\theta 2(t)) \sin(\varphi 2(t)) \phi 22'(t) \cos(\varphi 2(t)) + m2(\zeta c2^2 + \gamma \kappa 2^2) \cos(\theta 2(t)) \sin(\varphi 2(t)) \phi 22'(t) \cos(\varphi 2(t)) - \\
& m2(\gamma \kappa 2^2 + \xi c2^2) \cos(\theta 2(t)) \sin(\varphi 2(t)) \phi 22'(t) \cos(\varphi 2(t)) + \\
& cx6 lc2e \sin(\theta 2(t)) \sin(\phi 2(t)) (-lc4d(1 - \cos(\theta 4(t)) \cos(\phi 4(t))) + lc2e \cos(\theta 2(t)) \sin(\phi 2(t)) + x2(t) - x4(t)) - \\
& cx7 lc2k \sin(\theta 2(t)) \sin(\phi 2(t)) (-lc5l(1 - \cos(\theta 5(t)) \cos(\phi 5(t))) - lc2k \cos(\theta 2(t)) \sin(\phi 2(t)) + x2(t) - x5(t)) + \\
& cy6 lc2e \cos(\phi 2(t)) \sin(\theta 2(t)) (-lc2e(1 - \cos(\theta 2(t)) \cos(\phi 2(t))) - lc4d \cos(\theta 4(t)) \sin(\phi 4(t)) - y2(t) + y4(t)) + \\
& cy7 lc2k \cos(\phi 2(t)) \sin(\theta 2(t)) (-lc2k(1 - \cos(\theta 2(t)) \cos(\phi 2(t))) + lc5l \cos(\theta 5(t)) \sin(\phi 5(t)) + y2(t) - y5(t)) + \\
& cz6 lc2e \cos(\theta 2(t)) (-lc2e \sin(\theta 2(t)) - lc4d \sin(\theta 4(t)) + z2(t) - z4(t)) - \\
& cz7 lc2k \cos(\theta 2(t)) (lc2k \sin(\theta 2(t)) - lc5l \sin(\theta 5(t)) + z2(t) - z5(t)) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{cy2} (-\text{Ree} \cos(\theta 2(t)) (1 - \cos(\theta 2(t)) \cos(\phi 2(t))) - \cos(\phi 2(t)) \sin(\theta 2(t)) (\text{lc2ee} + \text{Ree} \sin(\theta 2(t)))) \\
& \quad (- (1 - \cos(\theta 2(t)) \cos(\phi 2(t))) (\text{lc2ee} + \text{Ree} \sin(\theta 2(t))) - y 2'(t) + \beta 2(t)) - \\
& \text{cy3} (\text{Rkk} \cos(\theta 2(t)) (1 - \cos(\theta 2(t)) \cos(\phi 2(t))) - \cos(\phi 2(t)) \sin(\theta 2(t)) (\text{lc2kk} - \text{Rkk} \sin(\theta 2(t)))) \\
& \quad (- (1 - \cos(\theta 2(t)) \cos(\phi 2(t))) (\text{lc2kk} - \text{Rkk} \sin(\theta 2(t))) + y 2'(t) - \beta 3(t)) - \\
& \text{cz2} (\text{Ree} \cos(\theta 2(t)) \sin(\theta 2(t)) + \cos(\theta 2(t)) (\text{lc2ee} + \text{Ree} \sin(\theta 2(t)))) (\sin(\theta 2(t)) (\text{lc2ee} + \text{Ree} \sin(\theta 2(t))) - z 2'(t) + \gamma 2(t)) - \\
& \text{cz3} (\text{Rkk} \cos(\theta 2(t)) \sin(\theta 2(t)) - \cos(\theta 2(t)) (\text{lc2kk} - \text{Rkk} \sin(\theta 2(t)))) \\
& \quad (- \sin(\theta 2(t)) (\text{lc2kk} - \text{Rkk} \sin(\theta 2(t))) - z 2'(t) + \gamma 3(t)) + \\
& \text{kz2} (-\text{Ree} \cos(\theta 2(t)) \sin(\theta 2(t)) - \cos(\theta 2(t)) (\text{lc2ee} + \text{Ree} \sin(\theta 2(t)))) \\
& \quad (- z 2'(t) + \gamma 2'(t) + \text{Ree} \cos(\theta 2(t)) \sin(\theta 2(t)) \theta 2'(t) + \cos(\theta 2(t)) (\text{lc2ee} + \text{Ree} \sin(\theta 2(t))) \theta 2'(t)) + \\
& \text{kz3} (\cos(\theta 2(t)) (\text{lc2kk} - \text{Rkk} \sin(\theta 2(t))) - \text{Rkk} \cos(\theta 2(t)) \sin(\theta 2(t))) \\
& \quad (- z 2'(t) + \gamma 3'(t) + \text{Rkk} \cos(\theta 2(t)) \sin(\theta 2(t)) \theta 2'(t) - \cos(\theta 2(t)) (\text{lc2kk} - \text{Rkk} \sin(\theta 2(t))) \theta 2'(t)) - \\
& \text{kz22} \text{lc2e} \cos(\theta 2(t)) (- z 2'(t) + z 4'(t) + \text{lc2e} \cos(\theta 2(t)) \theta 2'(t) + \text{lc4d} \cos(\theta 4(t)) \theta 4'(t)) + \\
& \text{kz32} \text{lc2k} \cos(\theta 2(t)) (- z 2'(t) + z 5'(t) - \text{lc2k} \cos(\theta 2(t)) \theta 2'(t) + \text{lc5l} \cos(\theta 5(t)) \theta 5'(t)) + \\
& \text{I}^2 \cos(\theta 2(t)) \sin^2(\varphi 2(t)) \varphi 2'(t) \phi 2'(t) - \text{I}^2 \cos(\theta 2(t)) \sin^2(\varphi 2(t)) \varphi 2'(t) \phi 2'(t) - \\
& \text{m2} (\zeta c^2 + \gamma c^2) \cos(\theta 2(t)) \sin^2(\varphi 2(t)) \varphi 2'(t) \phi 2'(t) + \text{m2} (\gamma c^2 + \zeta c^2) \cos(\theta 2(t)) \sin^2(\varphi 2(t)) \varphi 2'(t) \phi 2'(t) + \\
& \quad \frac{1}{2} \text{I}^2 (2 \cos(\theta 2(t)) \sin(\theta 2(t)) \phi 2'(t)^2 + 2 \cos(\theta 2(t)) \varphi 2'(t) \phi 2'(t)) + \\
& \quad \frac{1}{2} \text{I}^2 (-2 \cos(\theta 2(t)) \cos^2(\varphi 2(t)) \sin(\theta 2(t)) \phi 2'(t)^2 - 2 \cos(\varphi 2(t)) \sin(\theta 2(t)) \sin(\varphi 2(t)) \theta 2'(t) \phi 2'(t)) + \\
& \quad \frac{1}{2} \text{I}^2 (2 \cos(\varphi 2(t)) \sin(\theta 2(t)) \sin(\varphi 2(t)) \theta 2'(t) \phi 2'(t) - 2 \cos(\theta 2(t)) \sin(\theta 2(t)) \sin^2(\varphi 2(t)) \phi 2'(t)^2) + \\
& \text{ky3} (\text{Rkk} \cos(\theta 2(t)) (1 - \cos(\theta 2(t)) \cos(\phi 2(t))) - \cos(\phi 2(t)) \sin(\theta 2(t)) (\text{lc2kk} - \text{Rkk} \sin(\theta 2(t)))) \\
& \quad (- y 2'(t) + \beta 3'(t) - \text{Rkk} \cos(\theta 2(t)) (1 - \cos(\theta 2(t)) \cos(\phi 2(t))) \theta 2'(t) + \\
& \quad (\text{lc2kk} - \text{Rkk} \sin(\theta 2(t))) (\cos(\phi 2(t)) \sin(\theta 2(t)) \theta 2'(t) + \cos(\theta 2(t)) \sin(\phi 2(t)) \phi 2'(t))) + \\
& \text{ky2} (\text{Ree} \cos(\theta 2(t)) (1 - \cos(\theta 2(t)) \cos(\phi 2(t))) + \cos(\phi 2(t)) \sin(\theta 2(t)) (\text{lc2ee} + \text{Ree} \sin(\theta 2(t)))) \\
& \quad (- y 2'(t) + \beta 2'(t) - \text{Ree} \cos(\theta 2(t)) (1 - \cos(\theta 2(t)) \cos(\phi 2(t))) \theta 2'(t) - \\
& \quad (\text{lc2ee} + \text{Ree} \sin(\theta 2(t))) (\cos(\phi 2(t)) \sin(\theta 2(t)) \theta 2'(t) + \cos(\theta 2(t)) \sin(\phi 2(t)) \phi 2'(t))) + \\
& \quad \frac{1}{2} \text{m2} ((\zeta c^2 + \xi c^2) (2 \cos(\theta 2(t)) \sin(\theta 2(t)) \phi 2'(t)^2 + 2 \cos(\theta 2(t)) \varphi 2'(t) \phi 2'(t)) + \\
& \quad (\gamma c^2 + \xi c^2) (-2 \cos(\theta 2(t)) \cos^2(\varphi 2(t)) \sin(\theta 2(t)) \phi 2'(t)^2 - 2 \cos(\varphi 2(t)) \sin(\theta 2(t)) \sin(\varphi 2(t)) \theta 2'(t) \phi 2'(t)) + \\
& \quad (\zeta c^2 + \gamma c^2) (2 \cos(\varphi 2(t)) \sin(\theta 2(t)) \sin(\varphi 2(t)) \theta 2'(t) \phi 2'(t) - 2 \cos(\theta 2(t)) \sin(\theta 2(t)) \sin^2(\varphi 2(t)) \phi 2'(t)^2)) + \\
& \text{ky22} \text{lc2e} \cos(\phi 2(t)) \sin(\theta 2(t)) \\
& \quad (- y 2'(t) + y 4'(t) + \text{lc4d} \sin(\theta 4(t)) \sin(\phi 4(t)) \theta 4'(t) - \text{lc2e} (\cos(\phi 2(t)) \sin(\theta 2(t)) \theta 2'(t) + \cos(\theta 2(t)) \sin(\phi 2(t)) \phi 2'(t)) - \\
& \quad \text{lc4d} \cos(\theta 4(t)) \cos(\phi 4(t)) \phi 4'(t)) - \\
& \text{kx22} \text{lc2e} \sin(\theta 2(t)) \sin(\phi 2(t)) \\
& \quad (- x 2'(t) + x 4'(t) + \text{lc2e} \sin(\theta 2(t)) \sin(\phi 2(t)) \theta 2'(t) - \text{lc2e} \cos(\theta 2(t)) \cos(\phi 2(t)) \phi 2'(t) + \\
& \quad \text{lc4d} (\cos(\phi 4(t)) \sin(\theta 4(t)) \theta 4'(t) + \cos(\theta 4(t)) \sin(\phi 4(t)) \phi 4'(t))) - \\
& \text{ky32} \text{lc2k} \cos(\phi 2(t)) \sin(\theta 2(t)) \\
& \quad (- y 2'(t) + y 5'(t) + \text{lc5l} \sin(\theta 5(t)) \sin(\phi 5(t)) \theta 5'(t) + \text{lc2k} (\cos(\phi 2(t)) \sin(\theta 2(t)) \theta 2'(t) + \cos(\theta 2(t)) \sin(\phi 2(t)) \phi 2'(t)) - \\
& \quad \text{lc5l} \cos(\theta 5(t)) \cos(\phi 5(t)) \phi 5'(t)) + \\
& \text{kx32} \text{lc2k} \sin(\theta 2(t)) \sin(\phi 2(t)) \\
& \quad (- x 2'(t) + x 5'(t) - \text{lc2k} \sin(\theta 2(t)) \sin(\phi 2(t)) \theta 2'(t) + \text{lc2k} \cos(\theta 2(t)) \cos(\phi 2(t)) \phi 2'(t) + \\
& \quad \text{lc5l} (\cos(\phi 5(t)) \sin(\theta 5(t)) \theta 5'(t) + \cos(\theta 5(t)) \sin(\phi 5(t)) \phi 5'(t))) \Big/ \\
& (\text{I}^2 \cos^2(\varphi 2(t)) + \text{m2} (\zeta c^2 + \gamma c^2) \cos^2(\varphi 2(t)) + \text{I}^2 \sin^2(\varphi 2(t)) + \text{m2} (\gamma c^2 + \zeta c^2) \sin^2(\varphi 2(t))),
\end{aligned}$$

$$x_{32}'(t) = \frac{1}{m_3 \pi}$$

(-2 Fx1  $\mu$ 1x

$$\tan^{-1}(1000(-x_3'(t) + x_4'(t) + lc_3t \sin(\theta_3(t)) \sin(\phi_3(t)) \theta_3'(t) - lc_3t \cos(\theta_3(t)) \cos(\phi_3(t)) \phi_3'(t) - h_4(\cos(\theta_4(t)) \cos(\varphi_4(t)) \cos(\phi_4(t)) \theta_4'(t) - \cos(\phi_4(t)) \sin(\theta_4(t)) \sin(\varphi_4(t)) \varphi_4'(t) + \cos(\varphi_4(t)) \sin(\phi_4(t)) \varphi_4'(t) + \cos(\phi_4(t)) \sin(\varphi_4(t)) \phi_4'(t) - \cos(\varphi_4(t)) \sin(\theta_4(t)) \sin(\phi_4(t)) \phi_4'(t))) -$$

2 Fx2  $\mu$ 2x

$$\tan^{-1}(1000(-x_3'(t) + x_5'(t) - lc_3u \sin(\theta_3(t)) \sin(\phi_3(t)) \theta_3'(t) + lc_3u \cos(\theta_3(t)) \cos(\phi_3(t)) \phi_3'(t) - h_5(\cos(\theta_5(t)) \cos(\varphi_5(t)) \cos(\phi_5(t)) \theta_5'(t) - \cos(\phi_5(t)) \sin(\theta_5(t)) \sin(\varphi_5(t)) \varphi_5'(t) + \cos(\varphi_5(t)) \sin(\phi_5(t)) \varphi_5'(t) + \cos(\phi_5(t)) \sin(\varphi_5(t)) \phi_5'(t) - \cos(\varphi_5(t)) \sin(\theta_5(t)) \sin(\phi_5(t)) \phi_5'(t))) - cx_9 h_4 \pi \cos(\varphi_4(t)) \cos(\phi_4(t)) \sin(\theta_4(t)) - cx_{10} h_5 \pi \cos(\varphi_5(t)) \cos(\phi_5(t)) \sin(\theta_5(t)) - cx_9 lc_3t \pi \cos(\theta_3(t)) \sin(\phi_3(t)) + cx_{10} lc_3u \pi \cos(\theta_3(t)) \sin(\phi_3(t)) - cx_9 h_4 \pi \sin(\varphi_4(t)) \sin(\phi_4(t)) - cx_{10} h_5 \pi \sin(\varphi_5(t)) \sin(\phi_5(t)) - cx_{10} \pi x_3(t) - cx_9 \pi x_3(t) + cx_9 \pi x_4(t) + cx_{10} \pi x_5(t)),$$

$$y_{32}'(t) = \frac{1}{m_3 \pi}$$

(cy\_9  $\pi$  cos( $\theta_3(t)$ ) cos( $\phi_3(t)$ ) lc\_3t - cy\_9  $\pi$  lc\_3t -

2 Fy1  $\mu$ 1y

$$\tan^{-1}(1000(-y_3'(t) + y_4'(t) - lc_3t(\cos(\phi_3(t)) \sin(\theta_3(t)) \theta_3'(t) + \cos(\theta_3(t)) \sin(\phi_3(t)) \phi_3'(t)) + h_4(\cos(\theta_4(t)) \cos(\varphi_4(t)) \sin(\phi_4(t)) \theta_4'(t) - \cos(\varphi_4(t)) \cos(\phi_4(t)) \varphi_4'(t) - \sin(\theta_4(t)) \sin(\varphi_4(t)) \sin(\phi_4(t)) \varphi_4'(t) + \cos(\varphi_4(t)) \cos(\phi_4(t)) \sin(\theta_4(t)) \phi_4'(t) + \sin(\varphi_4(t)) \sin(\phi_4(t)) \phi_4'(t))) +$$

2 Fy2  $\mu$ 2y

$$\tan^{-1}(1000(y_3'(t) - y_5'(t) - lc_3u(\cos(\phi_3(t)) \sin(\theta_3(t)) \theta_3'(t) + \cos(\theta_3(t)) \sin(\phi_3(t)) \phi_3'(t)) - h_5(\cos(\theta_5(t)) \cos(\varphi_5(t)) \sin(\phi_5(t)) \theta_5'(t) - \cos(\varphi_5(t)) \cos(\phi_5(t)) \varphi_5'(t) - \sin(\theta_5(t)) \sin(\varphi_5(t)) \sin(\phi_5(t)) \varphi_5'(t) + \cos(\varphi_5(t)) \cos(\phi_5(t)) \sin(\theta_5(t)) \phi_5'(t) + \sin(\varphi_5(t)) \sin(\phi_5(t)) \phi_5'(t))) - cy_{10} lc_3u \pi \cos(\theta_3(t)) \cos(\phi_3(t)) - cy_9 h_4 \pi \cos(\phi_4(t)) \sin(\varphi_4(t)) - cy_{10} h_5 \pi \cos(\phi_5(t)) \sin(\varphi_5(t)) + cy_9 h_4 \pi \cos(\varphi_4(t)) \sin(\theta_4(t)) \sin(\phi_4(t)) + cy_{10} h_5 \pi \cos(\varphi_5(t)) \sin(\theta_5(t)) \sin(\phi_5(t)) - cy_{10} \pi y_3(t) - cy_9 \pi y_3(t) + cy_9 \pi y_4(t) + cy_{10} \pi y_5(t) + cy_{10} lc_3u \pi),$$

$$z_{32}'(t) = \frac{1}{m_3 \pi}$$

(-cz\_9  $\pi$  cos( $\theta_4(t)$ ) cos( $\varphi_4(t)$ ) h\_4 + cz\_9  $\pi$  h\_4 -

2 Fz1  $\mu$ 1z

$$\tan^{-1}(1000(-z_3'(t) + z_4'(t) + lc_3t \cos(\theta_3(t)) \theta_3'(t) + h_4(\cos(\varphi_4(t)) \sin(\theta_4(t)) \theta_4'(t) + \cos(\theta_4(t)) \sin(\varphi_4(t)) \varphi_4'(t))) -$$

2 Fz2  $\mu$ 2z

$$\tan^{-1}(1000(-z_3'(t) + z_5'(t) - lc_3u \cos(\theta_3(t)) \theta_3'(t) + h_5(\cos(\varphi_5(t)) \sin(\theta_5(t)) \theta_5'(t) + \cos(\theta_5(t)) \sin(\varphi_5(t)) \varphi_5'(t))) - cz_{10} h_5 \pi \cos(\theta_5(t)) \cos(\varphi_5(t)) + cz_9 lc_3t \pi \sin(\theta_3(t)) - cz_{10} lc_3u \pi \sin(\theta_3(t)) - cz_{10} \pi z_3(t) - cz_9 \pi z_3(t) + cz_9 \pi z_4(t) + cz_{10} \pi z_5(t) + cz_{10} h_5 \pi),$$

$$\varphi_{32}'(t) = \frac{1}{m_3 \zeta c^3 + m_3 \xi c^3 + I_7 \beta}$$

$$(-m_3 \cos(\theta_3(t)) \sin(\varphi_3(t)) \theta_3'(t)^2 \zeta c^3 + m_3 \cos^2(\theta_3(t)) \cos(\varphi_3(t)) \sin(\varphi_3(t)) \phi_3'(t)^2 \zeta c^3 - m_3 \cos(\theta_3(t)) \cos^2(\varphi_3(t)) \theta_3'(t) \phi_3'(t) \zeta c^3 + m_3 \cos(\theta_3(t)) \sin^2(\varphi_3(t)) \theta_3'(t) \phi_3'(t) \zeta c^3 - m_3 \cos(\theta_3(t)) \theta_3'(t) \phi_3'(t) \zeta c^3 - m_3 \sin(\theta_3(t)) \phi_{32}'(t) \zeta c^3 + m_3 \xi c^3 \cos(\theta_3(t)) \sin(\varphi_3(t)) \theta_3'(t)^2 + I_7^3 \cos(\theta_3(t)) \sin(\varphi_3(t)) \theta_3'(t)^2 - I_7^3 \cos(\theta_3(t)) \sin(\varphi_3(t)) \theta_3'(t)^2 - m_3 \xi c^3 \cos^2(\theta_3(t)) \cos(\varphi_3(t)) \sin(\varphi_3(t)) \phi_3'(t)^2 - I_7^3 \cos^2(\theta_3(t)) \cos(\varphi_3(t)) \sin(\varphi_3(t)) \phi_3'(t)^2 + I_7^3 \cos^2(\theta_3(t)) \cos(\varphi_3(t)) \sin(\varphi_3(t)) \phi_3'(t)^2 + m_3 \xi c^3 \cos(\theta_3(t)) \cos^2(\varphi_3(t)) \theta_3'(t) \phi_3'(t) + I_7^3 \cos(\theta_3(t)) \cos^2(\varphi_3(t)) \theta_3'(t) \phi_3'(t) - I_7^3 \cos(\theta_3(t)) \cos^2(\varphi_3(t)) \theta_3'(t) \phi_3'(t) - m_3 \xi c^3 \cos(\theta_3(t)) \sin^2(\varphi_3(t)) \theta_3'(t) \phi_3'(t) - I_7^3 \cos(\theta_3(t)) \sin^2(\varphi_3(t)) \theta_3'(t) \phi_3'(t) + I_7^3 \cos(\theta_3(t)) \sin^2(\varphi_3(t)) \theta_3'(t) \phi_3'(t) - m_3 \xi c^3 \cos(\theta_3(t)) \theta_3'(t) \phi_3'(t) - I_7 \beta \cos(\theta_3(t)) \theta_3'(t) \phi_3'(t) - m_3 \xi c^3 \sin(\theta_3(t)) \phi_{32}'(t) - I_7 \beta \sin(\theta_3(t)) \phi_{32}'(t)),$$

$\phi 32'(t) =$

$$\begin{aligned}
& (-cy^9 \pi \cos(\theta 3(t)) \sin(\phi 3(t)) lc3t^2 - cx^9 \pi \cos^2(\theta 3(t)) \cos(\phi 3(t)) \sin(\phi 3(t)) lc3t^2 + cy^9 \pi \cos^2(\theta 3(t)) \cos(\phi 3(t)) \sin(\phi 3(t)) lc3t^2 - \\
& 2 Fx1 \mu 1x \\
& \tan^{-1}(1000(-x3'(t) + x4'(t) + lc3t \sin(\theta 3(t)) \sin(\phi 3(t)) \theta 3'(t) - lc3t \cos(\theta 3(t)) \cos(\phi 3(t)) \phi 3'(t) - \\
& \quad h4(\cos(\theta 4(t)) \cos(\varphi 4(t)) \cos(\phi 4(t)) \theta 4'(t) - \cos(\phi 4(t)) \sin(\theta 4(t)) \sin(\varphi 4(t)) \varphi 4'(t) + \cos(\varphi 4(t)) \\
& \quad \sin(\phi 4(t)) \varphi 4'(t) + \cos(\phi 4(t)) \sin(\varphi 4(t)) \phi 4'(t) - \cos(\varphi 4(t)) \sin(\theta 4(t)) \sin(\phi 4(t)) \phi 4'(t))) \\
& \cos(\theta 3(t)) \cos(\phi 3(t)) lc3t - cx^9 h4 \pi \cos(\theta 3(t)) \cos(\varphi 4(t)) \cos(\phi 3(t)) \cos(\phi 4(t)) \sin(\theta 4(t)) lc3t - \\
& 2 Fy1 \mu 1y \\
& \tan^{-1}(1000(-y3'(t) + y4'(t) - lc3t(\cos(\theta 3(t)) \sin(\theta 3(t)) \theta 3'(t) + \cos(\theta 3(t)) \sin(\phi 3(t)) \phi 3'(t)) + \\
& \quad h4(\cos(\theta 4(t)) \cos(\varphi 4(t)) \sin(\phi 4(t)) \theta 4'(t) - \cos(\varphi 4(t)) \cos(\phi 4(t)) \varphi 4'(t) - \sin(\theta 4(t)) \sin(\varphi 4(t)) \\
& \quad \sin(\phi 4(t)) \varphi 4'(t) + \cos(\varphi 4(t)) \cos(\phi 4(t)) \sin(\theta 4(t)) \phi 4'(t) + \sin(\varphi 4(t)) \sin(\phi 4(t)) \phi 4'(t))) \\
& \cos(\theta 3(t)) \sin(\phi 3(t)) lc3t - cy^9 h4 \pi \cos(\theta 3(t)) \cos(\phi 4(t)) \sin(\varphi 4(t)) \sin(\phi 3(t)) lc3t - \\
& cx^9 h4 \pi \cos(\theta 3(t)) \cos(\phi 3(t)) \sin(\varphi 4(t)) \sin(\phi 4(t)) lc3t + \\
& cy^9 h4 \pi \cos(\theta 3(t)) \cos(\varphi 4(t)) \sin(\theta 4(t)) \sin(\phi 3(t)) \sin(\phi 4(t)) lc3t - cx^9 \pi \cos(\theta 3(t)) \cos(\phi 3(t)) x3(t) lc3t + \\
& cx^9 \pi \cos(\theta 3(t)) \cos(\phi 3(t)) x4(t) lc3t - cy^9 \pi \cos(\theta 3(t)) \sin(\phi 3(t)) y3(t) lc3t + cy^9 \pi \cos(\theta 3(t)) \sin(\phi 3(t)) y4(t) lc3t - \\
& m3 \pi \zeta c3^2 \cos(\varphi 3(t)) \sin(\theta 3(t)) \sin(\varphi 3(t)) \theta 3'(t)^2 + m3 \pi \xi c3^2 \cos(\varphi 3(t)) \sin(\theta 3(t)) \sin(\varphi 3(t)) \theta 3'(t)^2 + \\
& I\zeta 3 \pi \cos(\varphi 3(t)) \sin(\theta 3(t)) \sin(\varphi 3(t)) \theta 3'(t)^2 - I\zeta 3 \pi \cos(\varphi 3(t)) \sin(\theta 3(t)) \sin(\varphi 3(t)) \theta 3'(t)^2 + \\
& 2 Fx2 lc3u \mu 2x \\
& \tan^{-1}(1000(-x3'(t) + x5'(t) - lc3u \sin(\theta 3(t)) \sin(\phi 3(t)) \theta 3'(t) + lc3u \cos(\theta 3(t)) \cos(\phi 3(t)) \phi 3'(t) - \\
& \quad h5(\cos(\theta 5(t)) \cos(\varphi 5(t)) \cos(\phi 5(t)) \theta 5'(t) - \cos(\phi 5(t)) \sin(\theta 5(t)) \sin(\varphi 5(t)) \varphi 5'(t) + \cos(\varphi 5(t)) \\
& \quad \sin(\phi 5(t)) \varphi 5'(t) + \cos(\phi 5(t)) \sin(\varphi 5(t)) \phi 5'(t) - \cos(\varphi 5(t)) \sin(\theta 5(t)) \sin(\phi 5(t)) \phi 5'(t))) \\
& \cos(\theta 3(t)) \cos(\phi 3(t)) + cx10 h5 lc3u \pi \cos(\theta 3(t)) \cos(\varphi 5(t)) \cos(\phi 3(t)) \cos(\phi 5(t)) \sin(\theta 5(t)) - \\
& 2 Fy2 lc3u \mu 2y \\
& \tan^{-1}(1000(y3'(t) - y5'(t) - lc3u(\cos(\theta 3(t)) \sin(\theta 3(t)) \theta 3'(t) + \cos(\theta 3(t)) \sin(\phi 3(t)) \phi 3'(t)) - \\
& \quad h5(\cos(\theta 5(t)) \cos(\varphi 5(t)) \sin(\phi 5(t)) \theta 5'(t) - \cos(\varphi 5(t)) \cos(\phi 5(t)) \varphi 5'(t) - \sin(\theta 5(t)) \sin(\varphi 5(t)) \\
& \quad \sin(\phi 5(t)) \varphi 5'(t) + \cos(\varphi 5(t)) \cos(\phi 5(t)) \sin(\theta 5(t)) \phi 5'(t) + \sin(\varphi 5(t)) \sin(\phi 5(t)) \phi 5'(t))) \\
& \cos(\theta 3(t)) \sin(\phi 3(t)) - cy10 lc3u^2 \pi \cos(\theta 3(t)) \sin(\phi 3(t)) - cx10 lc3u^2 \pi \cos^2(\theta 3(t)) \cos(\phi 3(t)) \sin(\phi 3(t)) + \\
& cy10 lc3u^2 \pi \cos^2(\theta 3(t)) \cos(\phi 3(t)) \sin(\phi 3(t)) + cy10 h5 lc3u \pi \cos(\theta 3(t)) \cos(\phi 5(t)) \sin(\varphi 5(t)) \sin(\phi 3(t)) + \\
& cx10 h5 lc3u \pi \cos(\theta 3(t)) \cos(\phi 3(t)) \sin(\varphi 5(t)) \sin(\phi 5(t)) - \\
& cy10 h5 lc3u \pi \cos(\theta 3(t)) \cos(\varphi 5(t)) \sin(\theta 5(t)) \sin(\phi 3(t)) \sin(\phi 5(t)) + cx10 lc3u \pi \cos(\theta 3(t)) \cos(\phi 3(t)) x3(t) - \\
& cx10 lc3u \pi \cos(\theta 3(t)) \cos(\phi 3(t)) x5(t) + cy10 lc3u \pi \cos(\theta 3(t)) \sin(\phi 3(t)) y3(t) - cy10 lc3u \pi \cos(\theta 3(t)) \sin(\phi 3(t)) y5(t) + \\
& m3 \pi \zeta c3^2 \cos(\theta 3(t)) \cos(\varphi 3(t)) \sin(\varphi 3(t)) \theta 32'(t) - m3 \pi \xi c3^2 \cos(\theta 3(t)) \cos(\varphi 3(t)) \sin(\varphi 3(t)) \theta 32'(t) - \\
& I\zeta 3 \pi \cos(\theta 3(t)) \cos(\varphi 3(t)) \sin(\varphi 3(t)) \theta 32'(t) + I\zeta 3 \pi \cos(\theta 3(t)) \cos(\varphi 3(t)) \sin(\varphi 3(t)) \theta 32'(t) + \\
& m3 \pi \zeta c3^2 \cos(\theta 3(t)) \cos^2(\varphi 3(t)) \theta 3'(t) \varphi 3'(t) - m3 \pi \xi c3^2 \cos(\theta 3(t)) \cos^2(\varphi 3(t)) \theta 3'(t) \varphi 3'(t) - \\
& I\zeta 3 \pi \cos(\theta 3(t)) \cos^2(\varphi 3(t)) \theta 3'(t) \varphi 3'(t) + I\zeta 3 \pi \cos(\theta 3(t)) \cos^2(\varphi 3(t)) \theta 3'(t) \varphi 3'(t) - \\
& m3 \pi \zeta c3^2 \cos(\theta 3(t)) \sin^2(\varphi 3(t)) \theta 3'(t) \varphi 3'(t) + m3 \pi \xi c3^2 \cos(\theta 3(t)) \sin^2(\varphi 3(t)) \theta 3'(t) \varphi 3'(t) + \\
& I\zeta 3 \pi \cos(\theta 3(t)) \sin^2(\varphi 3(t)) \theta 3'(t) \varphi 3'(t) - I\zeta 3 \pi \cos(\theta 3(t)) \sin^2(\varphi 3(t)) \theta 3'(t) \varphi 3'(t) - m3 \pi \zeta c3^2 \cos(\theta 3(t)) \theta 3'(t) \varphi 3'(t) - \\
& m3 \pi \xi c3^2 \cos(\theta 3(t)) \theta 3'(t) \varphi 3'(t) - I\eta 3 \pi \cos(\theta 3(t)) \theta 3'(t) \varphi 3'(t) - m3 \pi \zeta c3^2 \sin(\theta 3(t)) \varphi 32'(t) - \\
& m3 \pi \xi c3^2 \sin(\theta 3(t)) \varphi 32'(t) - I\eta 3 \pi \sin(\theta 3(t)) \varphi 32'(t) + 2 m3 \pi \zeta c3^2 \cos(\theta 3(t)) \sin(\theta 3(t)) \sin^2(\varphi 3(t)) \theta 3'(t) \phi 3'(t) + \\
& 2 m3 \pi \eta c3^2 \cos(\theta 3(t)) \sin(\theta 3(t)) \sin^2(\varphi 3(t)) \theta 3'(t) \phi 3'(t) + 2 I\zeta 3 \pi \cos(\theta 3(t)) \sin(\theta 3(t)) \sin^2(\varphi 3(t)) \theta 3'(t) \phi 3'(t) + \\
& 2 m3 \pi \eta c3^2 \cos(\theta 3(t)) \cos^2(\varphi 3(t)) \sin(\theta 3(t)) \theta 3'(t) \phi 3'(t) + 2 m3 \pi \xi c3^2 \cos(\theta 3(t)) \cos^2(\varphi 3(t)) \sin(\theta 3(t)) \theta 3'(t) \phi 3'(t) + \\
& 2 I\zeta 3 \pi \cos(\theta 3(t)) \cos^2(\varphi 3(t)) \sin(\theta 3(t)) \theta 3'(t) \phi 3'(t) - 2 m3 \pi \zeta c3^2 \cos(\theta 3(t)) \sin(\theta 3(t)) \theta 3'(t) \phi 3'(t) - \\
& 2 m3 \pi \xi c3^2 \cos(\theta 3(t)) \sin(\theta 3(t)) \theta 3'(t) \phi 3'(t) - 2 I\eta 3 \pi \cos(\theta 3(t)) \sin(\theta 3(t)) \theta 3'(t) \phi 3'(t) - \\
& 2 m3 \pi \zeta c3^2 \cos^2(\theta 3(t)) \cos(\varphi 3(t)) \sin(\varphi 3(t)) \varphi 3'(t) \phi 3'(t) + 2 m3 \pi \xi c3^2 \cos^2(\theta 3(t)) \cos(\varphi 3(t)) \sin(\varphi 3(t)) \varphi 3'(t) \phi 3'(t) + \\
& 2 I\zeta 3 \pi \cos^2(\theta 3(t)) \cos(\varphi 3(t)) \sin(\varphi 3(t)) \varphi 3'(t) \phi 3'(t) - 2 I\zeta 3 \pi \cos^2(\theta 3(t)) \cos(\varphi 3(t)) \sin(\varphi 3(t)) \varphi 3'(t) \phi 3'(t)) / \\
& (\pi(m3 \eta c3^2 \cos^2(\theta 3(t)) \cos^2(\varphi 3(t)) + m3 \xi c3^2 \cos^2(\theta 3(t)) \cos^2(\varphi 3(t)) + I\zeta 3 \cos^2(\theta 3(t)) \cos^2(\varphi 3(t)) + \\
& \quad m3 \zeta c3^2 \sin^2(\theta 3(t)) + m3 \xi c3^2 \sin^2(\theta 3(t)) + I\eta 3 \sin^2(\theta 3(t)) + m3 \zeta c3^2 \cos^2(\theta 3(t)) \sin^2(\varphi 3(t)) + \\
& \quad m3 \eta c3^2 \cos^2(\theta 3(t)) \sin^2(\varphi 3(t)) + I\zeta 3 \cos^2(\theta 3(t)) \sin^2(\varphi 3(t))),
\end{aligned}$$

$\theta_{32}'(t) =$

$$\begin{aligned}
& (cx^9 \pi \cos(\theta_3(t)) \sin(\theta_3(t)) \sin^2(\phi_3(t)) lc3t^2 + cy^9 \pi \cos(\theta_3(t)) \cos^2(\phi_3(t)) \sin(\theta_3(t)) lc3t^2 - \\
& cz^9 \pi \cos(\theta_3(t)) \sin(\theta_3(t)) lc3t^2 - cy^9 \pi \cos(\phi_3(t)) \sin(\theta_3(t)) lc3t^2 + \\
& 2 Fz1 \mu lz \\
& \tan^{-1}(1000(-z_3'(t) + z_4'(t) + lc3t \cos(\theta_3(t)) \theta_3'(t) + h4(\cos(\varphi_4(t)) \sin(\theta_4(t)) \theta_4'(t) + \cos(\theta_4(t)) \sin(\varphi_4(t)) \varphi_4'(t)))) \\
& \cos(\theta_3(t)) lc3t - cz^9 h4 \pi \cos(\theta_3(t)) lc3t + cz^9 h4 \pi \cos(\theta_3(t)) \cos(\theta_4(t)) \cos(\varphi_4(t)) lc3t - \\
& 2 Fy1 \mu ly \\
& \tan^{-1}(1000(-y_3'(t) + y_4'(t) - lc3t(\cos(\phi_3(t)) \sin(\theta_3(t)) \theta_3'(t) + \cos(\theta_3(t)) \sin(\phi_3(t)) \phi_3'(t)) + \\
& h4(\cos(\theta_4(t)) \cos(\varphi_4(t)) \sin(\phi_4(t)) \theta_4'(t) - \cos(\varphi_4(t)) \cos(\phi_4(t)) \varphi_4'(t) - \sin(\theta_4(t)) \sin(\varphi_4(t)) \\
& \sin(\phi_4(t)) \varphi_4'(t) + \cos(\varphi_4(t)) \cos(\theta_4(t)) \sin(\theta_4(t)) \theta_4'(t) + \sin(\varphi_4(t)) \sin(\theta_4(t)) \theta_4'(t)))) \\
& \cos(\phi_3(t)) \sin(\theta_3(t)) lc3t - cy^9 h4 \pi \cos(\phi_3(t)) \cos(\theta_4(t)) \sin(\theta_3(t)) \sin(\varphi_4(t)) lc3t + \\
& 2 Fx1 \mu lx \\
& \tan^{-1}(1000(-x_3'(t) + x_4'(t) + lc3t \sin(\theta_3(t)) \sin(\phi_3(t)) \theta_3'(t) - lc3t \cos(\theta_3(t)) \cos(\phi_3(t)) \phi_3'(t) - \\
& h4(\cos(\theta_4(t)) \cos(\varphi_4(t)) \cos(\phi_4(t)) \theta_4'(t) - \cos(\phi_4(t)) \sin(\theta_4(t)) \sin(\varphi_4(t)) \varphi_4'(t) + \cos(\varphi_4(t)) \\
& \sin(\phi_4(t)) \varphi_4'(t) + \cos(\phi_4(t)) \sin(\varphi_4(t)) \phi_4'(t) - \cos(\varphi_4(t)) \sin(\theta_4(t)) \sin(\phi_4(t)) \phi_4'(t)))) \\
& \sin(\theta_3(t)) \sin(\phi_3(t)) lc3t + cx^9 h4 \pi \cos(\varphi_4(t)) \cos(\phi_4(t)) \sin(\theta_3(t)) \sin(\theta_4(t)) \sin(\phi_3(t)) lc3t + \\
& cy^9 h4 \pi \cos(\varphi_4(t)) \cos(\phi_3(t)) \sin(\theta_3(t)) \sin(\theta_4(t)) \sin(\phi_4(t)) lc3t + \\
& cx^9 h4 \pi \sin(\theta_3(t)) \sin(\varphi_4(t)) \sin(\phi_3(t)) \sin(\phi_4(t)) lc3t + cx^9 \pi \sin(\theta_3(t)) \sin(\phi_3(t)) x_3(t) lc3t - \\
& cx^9 \pi \sin(\theta_3(t)) \sin(\phi_3(t)) x_4(t) lc3t - cy^9 \pi \cos(\phi_3(t)) \sin(\theta_3(t)) y_3(t) lc3t + cy^9 \pi \cos(\phi_3(t)) \sin(\theta_3(t)) y_4(t) lc3t + \\
& cz^9 \pi \cos(\theta_3(t)) z_3(t) lc3t - cz^9 \pi \cos(\theta_3(t)) z_4(t) lc3t + cx^{10} lc3u^2 \pi \cos(\theta_3(t)) \sin(\theta_3(t)) \sin^2(\phi_3(t)) - \\
& m_3 \pi \zeta c^3 \cos(\theta_3(t)) \sin(\theta_3(t)) \sin^2(\omega_3(t)) \phi_3'(t)^2 - m_3 \pi \eta c^3 \cos(\theta_3(t)) \sin(\theta_3(t)) \sin^2(\omega_3(t)) \phi_3'(t)^2 - \\
& l_3 \pi \cos(\theta_3(t)) \sin(\theta_3(t)) \sin^2(\omega_3(t)) \phi_3'(t)^2 - m_3 \pi \eta c^3 \cos(\theta_3(t)) \cos^2(\omega_3(t)) \sin(\theta_3(t)) \phi_3'(t)^2 - \\
& m_3 \pi \xi c^3 \cos(\theta_3(t)) \cos^2(\omega_3(t)) \sin(\theta_3(t)) \phi_3'(t)^2 - l_3 \pi \cos(\theta_3(t)) \cos^2(\omega_3(t)) \sin(\theta_3(t)) \phi_3'(t)^2 + \\
& m_3 \pi \zeta c^3 \cos(\theta_3(t)) \sin(\theta_3(t)) \phi_3'(t)^2 + m_3 \pi \xi c^3 \cos(\theta_3(t)) \sin(\theta_3(t)) \phi_3'(t)^2 + l_3 \pi \cos(\theta_3(t)) \sin(\theta_3(t)) \phi_3'(t)^2 - \\
& 2 Fz2 lc3u \mu 2z \\
& \tan^{-1}(1000(-z_3'(t) + z_5'(t) - lc3u \cos(\theta_3(t)) \theta_3'(t) + h_5(\cos(\varphi_5(t)) \sin(\theta_5(t)) \theta_5'(t) + \cos(\theta_5(t)) \sin(\varphi_5(t)) \varphi_5'(t)))) \\
& \cos(\theta_3(t)) + cz^{10} h_5 lc3u \pi \cos(\theta_3(t)) - cz^{10} h_5 lc3u \pi \cos(\theta_3(t)) \cos(\theta_5(t)) \cos(\varphi_5(t)) + \\
& cy^{10} lc3u^2 \pi \cos(\theta_3(t)) \cos^2(\phi_3(t)) \sin(\theta_3(t)) - cz^{10} lc3u^2 \pi \cos(\theta_3(t)) \sin(\theta_3(t)) - \\
& 2 Fy2 lc3u \mu 2y \\
& \tan^{-1}(1000(y_3'(t) - y_5'(t) - lc3u(\cos(\phi_3(t)) \sin(\theta_3(t)) \theta_3'(t) + \cos(\theta_3(t)) \sin(\phi_3(t)) \phi_3'(t)) - \\
& h_5(\cos(\theta_5(t)) \cos(\varphi_5(t)) \sin(\phi_5(t)) \theta_5'(t) - \cos(\varphi_5(t)) \cos(\phi_5(t)) \varphi_5'(t) - \sin(\theta_5(t)) \sin(\varphi_5(t)) \\
& \sin(\phi_5(t)) \varphi_5'(t) + \cos(\varphi_5(t)) \cos(\theta_5(t)) \sin(\theta_5(t)) \theta_5'(t) + \sin(\varphi_5(t)) \sin(\theta_5(t)) \theta_5'(t)))) \\
& \cos(\phi_3(t)) \sin(\theta_3(t)) - cy^{10} lc3u^2 \pi \cos(\phi_3(t)) \sin(\theta_3(t)) + cy^{10} h_5 lc3u \pi \cos(\phi_3(t)) \cos(\phi_5(t)) \sin(\theta_3(t)) \sin(\varphi_5(t)) - \\
& 2 Fx2 lc3u \mu 2x \\
& \tan^{-1}(1000(-x_3'(t) + x_5'(t) - lc3u \sin(\theta_3(t)) \sin(\phi_3(t)) \theta_3'(t) + lc3u \cos(\theta_3(t)) \cos(\phi_3(t)) \phi_3'(t) - \\
& h_5(\cos(\theta_5(t)) \cos(\varphi_5(t)) \cos(\phi_5(t)) \theta_5'(t) - \cos(\phi_5(t)) \sin(\theta_5(t)) \sin(\varphi_5(t)) \varphi_5'(t) + \cos(\varphi_5(t)) \\
& \sin(\phi_5(t)) \varphi_5'(t) + \cos(\phi_5(t)) \sin(\varphi_5(t)) \phi_5'(t) - \cos(\varphi_5(t)) \sin(\theta_5(t)) \sin(\phi_5(t)) \phi_5'(t)))) \\
& \sin(\theta_3(t)) \sin(\phi_3(t)) - cx^{10} h_5 lc3u \pi \cos(\varphi_5(t)) \cos(\phi_5(t)) \sin(\theta_3(t)) \sin(\theta_5(t)) \sin(\phi_3(t)) - \\
& cy^{10} h_5 lc3u \pi \cos(\varphi_5(t)) \cos(\phi_3(t)) \sin(\theta_3(t)) \sin(\theta_5(t)) \sin(\phi_5(t)) - \\
& cx^{10} h_5 lc3u \pi \sin(\theta_3(t)) \sin(\varphi_5(t)) \sin(\phi_3(t)) \sin(\phi_5(t)) - cx^{10} lc3u \pi \sin(\theta_3(t)) \sin(\phi_3(t)) x_3(t) + \\
& cx^{10} lc3u \pi \sin(\theta_3(t)) \sin(\phi_3(t)) x_5(t) + cy^{10} lc3u \pi \cos(\phi_3(t)) \sin(\theta_3(t)) y_3(t) - cy^{10} lc3u \pi \cos(\phi_3(t)) \sin(\theta_3(t)) y_5(t) - \\
& cz^{10} lc3u \pi \cos(\theta_3(t)) z_3(t) + cz^{10} lc3u \pi \cos(\theta_3(t)) z_5(t) + 2 m_3 \pi \zeta c^3 \cos(\omega_3(t)) \sin(\omega_3(t)) \theta_3'(t) \omega_3'(t) - \\
& 2 m_3 \pi \xi c^3 \cos(\omega_3(t)) \sin(\omega_3(t)) \theta_3'(t) \omega_3'(t) - 2 l_3 \pi \cos(\omega_3(t)) \sin(\omega_3(t)) \theta_3'(t) \omega_3'(t) + \\
& 2 l_3 \pi \cos(\omega_3(t)) \sin(\omega_3(t)) \theta_3'(t) \omega_3'(t) + m_3 \pi \zeta c^3 \cos(\theta_3(t)) \cos^2(\omega_3(t)) \omega_3'(t) \phi_3'(t) - \\
& m_3 \pi \xi c^3 \cos(\theta_3(t)) \cos^2(\omega_3(t)) \omega_3'(t) \phi_3'(t) - l_3 \pi \cos(\theta_3(t)) \cos^2(\omega_3(t)) \omega_3'(t) \phi_3'(t) + \\
& l_3 \pi \cos(\theta_3(t)) \cos^2(\omega_3(t)) \omega_3'(t) \phi_3'(t) - m_3 \pi \zeta c^3 \cos(\theta_3(t)) \sin^2(\omega_3(t)) \omega_3'(t) \phi_3'(t) + \\
& m_3 \pi \xi c^3 \cos(\theta_3(t)) \sin^2(\omega_3(t)) \omega_3'(t) \phi_3'(t) + l_3 \pi \cos(\theta_3(t)) \sin^2(\omega_3(t)) \omega_3'(t) \phi_3'(t) - \\
& l_3 \pi \cos(\theta_3(t)) \sin^2(\omega_3(t)) \omega_3'(t) \phi_3'(t) + m_3 \pi \zeta c^3 \cos(\theta_3(t)) \omega_3'(t) \phi_3'(t) + m_3 \pi \xi c^3 \cos(\theta_3(t)) \omega_3'(t) \phi_3'(t) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& l\gamma^3 \pi \cos(\theta_3(t)) \varphi_3'(t) \psi_3'(t) + m_3 \pi \zeta c^3 \cos(\theta_3(t)) \cos(\varphi_3(t)) \sin(\varphi_3(t)) \psi_3'(t) - \\
& m_3 \pi \xi c^3 \cos(\theta_3(t)) \cos(\varphi_3(t)) \sin(\varphi_3(t)) \psi_3'(t) - l\zeta^3 \pi \cos(\theta_3(t)) \cos(\varphi_3(t)) \sin(\varphi_3(t)) \psi_3'(t) + \\
& l\xi^3 \pi \cos(\theta_3(t)) \cos(\varphi_3(t)) \sin(\varphi_3(t)) \psi_3'(t) / \\
& (\pi (m_3 \zeta c^3 \cos^2(\varphi_3(t)) + m_3 \eta c^3 \cos^2(\varphi_3(t)) + l\zeta^3 \cos^2(\varphi_3(t)) + m_3 \eta c^3 \sin^2(\varphi_3(t)) + m_3 \xi c^3 \sin^2(\varphi_3(t)) + \\
& l\zeta^3 \sin^2(\varphi_3(t))), \\
x_{42}'(t) = & \frac{1}{m_4 \pi} (-c x_5 \pi \cos(\theta_4(t)) \cos(\psi_4(t)) l c_4 b + k x_{12} \pi \cos(\psi_4(t)) \sin(\theta_4(t)) \theta_4'(t) l c_4 b + \\
& k x_{12} \pi \cos(\theta_4(t)) \sin(\psi_4(t)) \psi_4'(t) l c_4 b + c x_5 \pi l c_4 b + \\
& 2 F x_1 \mu_1 x \\
& \tan^{-1}(1000 (-x_3'(t) + x_4'(t) + l c_3 t \sin(\theta_3(t)) \sin(\psi_3(t)) \theta_3'(t) - l c_3 t \cos(\theta_3(t)) \cos(\psi_3(t)) \psi_3'(t) - \\
& h_4 (\cos(\theta_4(t)) \cos(\varphi_4(t)) \cos(\psi_4(t)) \theta_4'(t) - \cos(\psi_4(t)) \sin(\theta_4(t)) \sin(\varphi_4(t)) \varphi_4'(t) + \\
& \cos(\varphi_4(t)) \sin(\psi_4(t)) \varphi_4'(t) + \cos(\psi_4(t)) \sin(\varphi_4(t)) \psi_4'(t) - \cos(\varphi_4(t)) \sin(\theta_4(t)) \sin(\psi_4(t)) \psi_4'(t)))) + \\
& c x_6 l c_4 d \pi \cos(\theta_4(t)) \cos(\psi_4(t)) + c x_9 h_4 \pi \cos(\varphi_4(t)) \cos(\psi_4(t)) \sin(\theta_4(t)) + c x_5 l c_1 a \pi \cos(\theta_1(t)) \sin(\psi_1(t)) + \\
& c x_6 l c_2 e \pi \cos(\theta_2(t)) \sin(\psi_2(t)) + c x_9 l c_3 t \pi \cos(\theta_3(t)) \sin(\psi_3(t)) + c x_9 h_4 \pi \sin(\varphi_4(t)) \sin(\psi_4(t)) + \\
& c x_5 \pi x_1(t) + c x_6 \pi x_2(t) + c x_9 \pi x_3(t) - c x_5 \pi x_4(t) - c x_6 \pi x_4(t) - c x_9 \pi x_4(t) + k x_{12} \pi x_1'(t) + k x_{22} \pi x_2'(t) - \\
& k x_{12} \pi x_4'(t) - k x_{22} \pi x_4'(t) - k x_{12} l c_1 a \pi \sin(\theta_1(t)) \sin(\psi_1(t)) \theta_1'(t) - k x_{22} l c_2 e \pi \sin(\theta_2(t)) \sin(\psi_2(t)) \theta_2'(t) - \\
& k x_{22} l c_4 d \pi \cos(\psi_4(t)) \sin(\theta_4(t)) \theta_4'(t) + k x_{12} l c_1 a \pi \cos(\theta_1(t)) \cos(\psi_1(t)) \psi_1'(t) + k x_{22} l c_2 e \pi \cos(\theta_2(t)) \cos(\psi_2(t)) \psi_2'(t) - \\
& k x_{22} l c_4 d \pi \cos(\theta_4(t)) \sin(\psi_4(t)) \psi_4'(t) - c x_6 l c_4 d \pi), \\
y_{42}'(t) = & \frac{1}{m_4 \pi} (-c y_5 \pi \cos(\theta_1(t)) \cos(\psi_1(t)) l c_1 a + k y_{12} \pi \cos(\psi_1(t)) \sin(\theta_1(t)) \theta_1'(t) l c_1 a + \\
& k y_{12} \pi \cos(\theta_1(t)) \sin(\psi_1(t)) \psi_1'(t) l c_1 a + c y_5 \pi l c_1 a + \\
& 2 F y_1 \mu_1 y \\
& \tan^{-1}(1000 (-y_3'(t) + y_4'(t) - l c_3 t (\cos(\psi_3(t)) \sin(\theta_3(t)) \theta_3'(t) + \cos(\theta_3(t)) \sin(\psi_3(t)) \psi_3'(t)) + \\
& h_4 (\cos(\theta_4(t)) \cos(\varphi_4(t)) \sin(\psi_4(t)) \theta_4'(t) - \cos(\varphi_4(t)) \cos(\psi_4(t)) \varphi_4'(t) - \sin(\theta_4(t)) \sin(\varphi_4(t)) \sin(\psi_4(t)) \varphi_4'(t) + \\
& \cos(\varphi_4(t)) \cos(\psi_4(t)) \sin(\theta_4(t)) \psi_4'(t) + \sin(\varphi_4(t)) \sin(\psi_4(t)) \psi_4'(t)))) - \\
& c y_6 l c_2 e \pi \cos(\theta_2(t)) \cos(\psi_2(t)) - c y_9 l c_3 t \pi \cos(\theta_3(t)) \cos(\psi_3(t)) + c y_9 h_4 \pi \cos(\psi_4(t)) \sin(\varphi_4(t)) - \\
& c y_5 l c_4 b \pi \cos(\theta_4(t)) \sin(\psi_4(t)) + c y_6 l c_4 d \pi \cos(\theta_4(t)) \sin(\psi_4(t)) - c y_9 h_4 \pi \cos(\varphi_4(t)) \sin(\theta_4(t)) \sin(\psi_4(t)) + \\
& c y_5 \pi y_1(t) + c y_6 \pi y_2(t) + c y_9 \pi y_3(t) - c y_5 \pi y_4(t) - c y_6 \pi y_4(t) - c y_9 \pi y_4(t) + k y_{12} \pi y_1'(t) + k y_{22} \pi y_2'(t) - \\
& k y_{12} \pi y_4'(t) - k y_{22} \pi y_4'(t) + k y_{22} l c_2 e \pi \cos(\psi_2(t)) \sin(\theta_2(t)) \theta_2'(t) + k y_{12} l c_4 b \pi \sin(\theta_4(t)) \sin(\psi_4(t)) \theta_4'(t) - \\
& k y_{22} l c_4 d \pi \sin(\theta_4(t)) \sin(\psi_4(t)) \theta_4'(t) + k y_{22} l c_2 e \pi \cos(\theta_2(t)) \sin(\psi_2(t)) \psi_2'(t) - k y_{12} l c_4 b \pi \cos(\theta_4(t)) \cos(\psi_4(t)) \psi_4'(t) + \\
& k y_{22} l c_4 d \pi \cos(\theta_4(t)) \cos(\psi_4(t)) \psi_4'(t) + c y_6 l c_2 e \pi + c y_9 l c_3 t \pi), \\
z_{42}'(t) = & \frac{1}{m_4 \pi} \\
& (c z_9 \pi \cos(\theta_4(t)) \cos(\varphi_4(t)) h_4 - c z_9 \pi h_4 + \\
& 2 F z_1 \mu_1 z \\
& \tan^{-1}(1000 (-z_3'(t) + z_4'(t) + l c_3 t \cos(\theta_3(t)) \theta_3'(t) + h_4 (\cos(\varphi_4(t)) \sin(\theta_4(t)) \theta_4'(t) + \cos(\theta_4(t)) \sin(\varphi_4(t)) \varphi_4'(t)))) - \\
& c z_5 l c_1 a \pi \sin(\theta_1(t)) - c z_6 l c_2 e \pi \sin(\theta_2(t)) - c z_9 l c_3 t \pi \sin(\theta_3(t)) + c z_5 l c_4 b \pi \sin(\theta_4(t)) - c z_6 l c_4 d \pi \sin(\theta_4(t)) + \\
& c z_5 \pi z_1(t) + c z_6 \pi z_2(t) + c z_9 \pi z_3(t) - c z_5 \pi z_4(t) - c z_6 \pi z_4(t) - c z_9 \pi z_4(t) + k z_{12} \pi z_1'(t) + k z_{22} \pi z_2'(t) - \\
& k z_{12} \pi z_4'(t) - k z_{22} \pi z_4'(t) - k z_{12} l c_1 a \pi \cos(\theta_1(t)) \theta_1'(t) - k z_{22} l c_2 e \pi \cos(\theta_2(t)) \theta_2'(t) + \\
& k z_{12} l c_4 b \pi \cos(\theta_4(t)) \theta_4'(t) - k z_{22} l c_4 d \pi \cos(\theta_4(t)) \theta_4'(t)),
\end{aligned}$$

$$\varphi_{42}'(t) = \frac{1}{m_4 \zeta c^4 + m_4 \gamma x^4 + I \zeta^4}$$

$$\left( \frac{1}{\pi} \left[ -2 Fz1 h_4 \mu l z \tan^{-1} (1000 (-z_3'(t) + z_4'(t) + lc3t \cos(\theta_3(t)) \theta_3'(t) + h_4 (\cos(\varphi_4(t)) \sin(\theta_4(t)) \theta_4'(t) + \cos(\theta_4(t)) \sin(\varphi_4(t)) \varphi_4'(t)))) \right. \right.$$

$$\left. \cos(\theta_4(t)) \sin(\varphi_4(t)) + cz_9 h_4 \cos(\theta_4(t)) (\cos(\theta_4(t)) \cos(\varphi_4(t)) h_4 - h_4 - lc3t \sin(\theta_3(t)) + z_3(t) - z_4(t)) \sin(\varphi_4(t)) - \right.$$

$$\left. \frac{1}{\pi} \right]$$

$$2 Fy1 h_4 \mu l y \tan^{-1} (1000 (-y_3'(t) + y_4'(t) - lc3t (\cos(\phi_3(t)) \sin(\theta_3(t)) \theta_3'(t) + \cos(\theta_3(t)) \sin(\phi_3(t)) \phi_3'(t)) +$$

$$h_4 (\cos(\theta_4(t)) \cos(\varphi_4(t)) \sin(\phi_4(t)) \theta_4'(t) - \cos(\varphi_4(t)) \cos(\phi_4(t)) \varphi_4'(t) - \sin(\theta_4(t)) \sin(\varphi_4(t)) \sin(\phi_4(t)) \varphi_4'(t) +$$

$$\cos(\varphi_4(t)) \cos(\phi_4(t)) \sin(\theta_4(t)) \phi_4'(t) + \sin(\varphi_4(t)) \sin(\phi_4(t)) \phi_4'(t)))$$

$$\left. (\cos(\varphi_4(t)) \cos(\phi_4(t)) + \sin(\theta_4(t)) \sin(\varphi_4(t)) \sin(\phi_4(t))) + \frac{1}{\pi} \right]$$

$$2 Fx1 h_4 \mu l x \tan^{-1} (1000 (-x_3'(t) + x_4'(t) + lc3t \sin(\theta_3(t)) \sin(\phi_3(t)) \theta_3'(t) - lc3t \cos(\theta_3(t)) \cos(\phi_3(t)) \phi_3'(t) -$$

$$h_4 (\cos(\theta_4(t)) \cos(\varphi_4(t)) \cos(\phi_4(t)) \theta_4'(t) - \cos(\phi_4(t)) \sin(\theta_4(t)) \sin(\varphi_4(t)) \varphi_4'(t) +$$

$$\cos(\varphi_4(t)) \sin(\phi_4(t)) \varphi_4'(t) + \cos(\phi_4(t)) \sin(\varphi_4(t)) \phi_4'(t) - \cos(\varphi_4(t)) \sin(\theta_4(t)) \sin(\phi_4(t)) \phi_4'(t)))$$

$$\left. (\cos(\phi_4(t)) \sin(\theta_4(t)) \sin(\varphi_4(t)) - \cos(\varphi_4(t)) \sin(\phi_4(t))) + \right.$$

$$cx_9 h_4 (\cos(\phi_4(t)) \sin(\theta_4(t)) \sin(\varphi_4(t)) - \cos(\varphi_4(t)) \sin(\phi_4(t)))$$

$$\left. (h_4 \cos(\varphi_4(t)) \cos(\phi_4(t)) \sin(\theta_4(t)) + lc3t \cos(\theta_3(t)) \sin(\phi_3(t)) + h_4 \sin(\varphi_4(t)) \sin(\phi_4(t)) + x_3(t) - x_4(t)) + \right.$$

$$cy_9 h_4 (\cos(\varphi_4(t)) \cos(\phi_4(t)) + \sin(\theta_4(t)) \sin(\varphi_4(t)) \sin(\phi_4(t)))$$

$$\left. (\cos(\theta_3(t)) \cos(\phi_3(t)) lc3t - lc3t - h_4 \cos(\phi_4(t)) \sin(\varphi_4(t)) + h_4 \cos(\varphi_4(t)) \sin(\theta_4(t)) \sin(\phi_4(t)) - y_3(t) + y_4(t)) + \right.$$

$$I \zeta^4 \cos(\theta_4(t)) \theta_4'(t) \phi_4'(t) + m_4 (\zeta c^4 + \gamma x^4) \cos(\theta_4(t)) \theta_4'(t) \phi_4'(t) -$$

$$I \zeta^4 (\cos(\theta_4(t)) \theta_4'(t) \phi_4'(t) \cos^2(\varphi_4(t)) + \cos^2(\theta_4(t)) \sin(\varphi_4(t)) \phi_4'(t)^2 \cos(\varphi_4(t)) - \cos(\varphi_4(t)) \sin(\varphi_4(t)) \theta_4'(t)^2 -$$

$$\cos(\theta_4(t)) \sin^2(\varphi_4(t)) \theta_4'(t) \phi_4'(t)) +$$

$$I \gamma^4 (\cos(\theta_4(t)) \theta_4'(t) \phi_4'(t) \cos^2(\varphi_4(t)) + \cos^2(\theta_4(t)) \sin(\varphi_4(t)) \phi_4'(t)^2 \cos(\varphi_4(t)) - \cos(\varphi_4(t)) \sin(\varphi_4(t)) \theta_4'(t)^2 -$$

$$\cos(\theta_4(t)) \sin^2(\varphi_4(t)) \theta_4'(t) \phi_4'(t)) +$$

$$m_4 (\zeta c^4 \cos(\theta_4(t)) \theta_4'(t) \phi_4'(t) \cos^2(\varphi_4(t)) - \gamma x^4 \cos(\theta_4(t)) \theta_4'(t) \phi_4'(t) \cos^2(\varphi_4(t)) + \gamma x^4 \sin(\varphi_4(t)) \theta_4'(t)^2 \cos(\varphi_4(t)) -$$

$$\zeta c^4 \sin(\varphi_4(t)) \theta_4'(t)^2 \cos(\varphi_4(t)) + \zeta c^4 \cos^2(\theta_4(t)) \sin(\varphi_4(t)) \phi_4'(t)^2 \cos(\varphi_4(t)) -$$

$$\gamma x^4 \cos^2(\theta_4(t)) \sin(\varphi_4(t)) \phi_4'(t)^2 \cos(\varphi_4(t)) - \zeta c^4 \cos(\theta_4(t)) \sin^2(\varphi_4(t)) \theta_4'(t) \phi_4'(t) +$$

$$\left. \gamma x^4 \cos(\theta_4(t)) \sin^2(\varphi_4(t)) \theta_4'(t) \phi_4'(t)) + I \zeta^4 \sin(\theta_4(t)) \phi_{42}'(t) + m_4 (\zeta c^4 + \gamma x^4) \sin(\theta_4(t)) \phi_{42}'(t) \right)$$

$$\phi_{42}'(t) =$$

$$\left( 2 I \zeta^4 \cos(\varphi_4(t)) \sin(\varphi_4(t)) \varphi_4'(t) \phi_4'(t) \cos^2(\theta_4(t)) - 2 I \gamma^4 \cos(\varphi_4(t)) \sin(\varphi_4(t)) \varphi_4'(t) \phi_4'(t) \cos^2(\theta_4(t)) - \right.$$

$$2 m_4 (\zeta c^4 + \zeta c^4) \cos(\varphi_4(t)) \sin(\varphi_4(t)) \varphi_4'(t) \phi_4'(t) \cos^2(\theta_4(t)) +$$

$$2 m_4 (\gamma x^4 + \zeta c^4) \cos(\varphi_4(t)) \sin(\varphi_4(t)) \varphi_4'(t) \phi_4'(t) \cos^2(\theta_4(t)) +$$

$$cx_6 lc4d \sin(\phi_4(t)) (\cos(\theta_4(t)) \cos(\phi_4(t)) lc4d - lc4d + lc2e \cos(\theta_2(t)) \sin(\phi_2(t)) + x_2(t) - x_4(t)) \cos(\theta_4(t)) +$$

$$cx_5 lc4b \sin(\phi_4(t)) (\cos(\theta_4(t)) \cos(\phi_4(t)) lc4b - lc4b - lc1a \cos(\theta_1(t)) \sin(\phi_1(t)) - x_1(t) + x_4(t)) \cos(\theta_4(t)) -$$

$$cy_6 lc4d \cos(\phi_4(t)) (-\cos(\theta_2(t)) \cos(\phi_2(t)) lc2e + lc2e + lc4d \cos(\theta_4(t)) \sin(\phi_4(t)) + y_2(t) - y_4(t)) \cos(\theta_4(t)) -$$

$$cy_5 lc4b \cos(\phi_4(t)) (\cos(\theta_1(t)) \cos(\phi_1(t)) lc1a - lc1a + lc4b \cos(\theta_4(t)) \sin(\phi_4(t)) - y_1(t) + y_4(t)) \cos(\theta_4(t)) +$$

$$I \zeta^4 \cos(\varphi_4(t)) \sin(\varphi_4(t)) \theta_{42}'(t) \cos(\theta_4(t)) - I \gamma^4 \cos(\varphi_4(t)) \sin(\varphi_4(t)) \theta_{42}'(t) \cos(\theta_4(t)) -$$

$$m_4 (\zeta c^4 + \zeta c^4) \cos(\varphi_4(t)) \sin(\varphi_4(t)) \theta_{42}'(t) \cos(\theta_4(t)) + m_4 (\gamma x^4 + \zeta c^4) \cos(\varphi_4(t)) \sin(\varphi_4(t)) \theta_{42}'(t) \cos(\theta_4(t)) +$$

$$I \zeta^4 \cos^2(\varphi_4(t)) \theta_4'(t) \varphi_4'(t) \cos(\theta_4(t)) - I \gamma^4 \cos^2(\varphi_4(t)) \theta_4'(t) \varphi_4'(t) \cos(\theta_4(t)) -$$

$$m_4 (\zeta c^4 + \zeta c^4) \cos^2(\varphi_4(t)) \theta_4'(t) \varphi_4'(t) \cos(\theta_4(t)) + m_4 (\gamma x^4 + \zeta c^4) \cos^2(\varphi_4(t)) \theta_4'(t) \varphi_4'(t) \cos(\theta_4(t)) -$$

$$I \zeta^4 \sin^2(\varphi_4(t)) \theta_4'(t) \varphi_4'(t) \cos(\theta_4(t)) + I \gamma^4 \sin^2(\varphi_4(t)) \theta_4'(t) \varphi_4'(t) \cos(\theta_4(t)) +$$

$$\left. m_4 (\zeta c^4 + \zeta c^4) \sin^2(\varphi_4(t)) \theta_4'(t) \varphi_4'(t) \cos(\theta_4(t)) - m_4 (\gamma x^4 + \zeta c^4) \sin^2(\varphi_4(t)) \theta_4'(t) \varphi_4'(t) \cos(\theta_4(t)) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& I\zeta 4 \theta 4'(t) \varphi 4'(t) \cos(\theta 4(t)) + m 4 (\zeta c 4^2 + \gamma \pi 4^2) \theta 4'(t) \varphi 4'(t) \cos(\theta 4(t)) + 2 l \gamma 4 \sin(\theta 4(t)) \sin^2(\varphi 4(t)) \theta 4'(t) \phi 4'(t) \cos(\theta 4(t)) + \\
& 2 m 4 (\zeta c 4^2 + \xi c 4^2) \sin(\theta 4(t)) \sin^2(\varphi 4(t)) \theta 4'(t) \phi 4'(t) \cos(\theta 4(t)) + 2 l \zeta 4 \cos^2(\varphi 4(t)) \sin(\theta 4(t)) \theta 4'(t) \phi 4'(t) \cos(\theta 4(t)) + \\
& 2 m 4 (\gamma \pi 4^2 + \xi c 4^2) \cos^2(\varphi 4(t)) \sin(\theta 4(t)) \theta 4'(t) \phi 4'(t) \cos(\theta 4(t)) - 2 l \zeta 4 \sin(\theta 4(t)) \theta 4'(t) \phi 4'(t) \cos(\theta 4(t)) - \\
& 2 m 4 (\zeta c 4^2 + \gamma \pi 4^2) \sin(\theta 4(t)) \theta 4'(t) \phi 4'(t) \cos(\theta 4(t)) - \\
& k y 1 2 l c 4 b \cos(\phi 4(t)) (-y 1'(t) + y 4'(t) - l c 1 a \cos(\theta 1(t)) \sin(\theta 1(t)) \theta 1'(t) - l c 4 b \sin(\theta 4(t)) \sin(\phi 4(t)) \theta 4'(t) - \\
& l c 1 a \cos(\theta 1(t)) \sin(\theta 1(t)) \phi 1'(t) + l c 4 b \cos(\theta 4(t)) \cos(\phi 4(t)) \phi 4'(t)) \cos(\theta 4(t)) - \\
& k y 2 2 l c 4 d \cos(\phi 4(t)) (y 2'(t) - y 4'(t) + l c 2 e \cos(\theta 2(t)) \sin(\theta 2(t)) \theta 2'(t) - l c 4 d \sin(\theta 4(t)) \sin(\phi 4(t)) \theta 4'(t) + \\
& l c 2 e \cos(\theta 2(t)) \sin(\theta 2(t)) \phi 2'(t) + l c 4 d \cos(\theta 4(t)) \cos(\phi 4(t)) \phi 4'(t)) \cos(\theta 4(t)) - \\
& k x 1 2 l c 4 b \sin(\phi 4(t)) (x 1'(t) - x 4'(t) - l c 1 a \sin(\theta 1(t)) \sin(\theta 1(t)) \theta 1'(t) + l c 4 b \cos(\theta 4(t)) \sin(\theta 4(t)) \theta 4'(t) + \\
& l c 1 a \cos(\theta 1(t)) \cos(\theta 1(t)) \phi 1'(t) + l c 4 b \cos(\theta 4(t)) \sin(\theta 4(t)) \phi 4'(t)) \cos(\theta 4(t)) - \\
& k x 2 2 l c 4 d \sin(\phi 4(t)) (-x 2'(t) + x 4'(t) + l c 2 e \sin(\theta 2(t)) \sin(\theta 2(t)) \theta 2'(t) + l c 4 d \cos(\theta 4(t)) \sin(\theta 4(t)) \theta 4'(t) - \\
& l c 2 e \cos(\theta 2(t)) \cos(\theta 2(t)) \phi 2'(t) + l c 4 d \cos(\theta 4(t)) \sin(\theta 4(t)) \phi 4'(t)) \cos(\theta 4(t)) - \\
& I\zeta 4 \cos(\varphi 4(t)) \sin(\theta 4(t)) \sin(\varphi 4(t)) \theta 4'(t)^2 + l \gamma 4 \cos(\varphi 4(t)) \sin(\theta 4(t)) \sin(\varphi 4(t)) \theta 4'(t)^2 + \\
& m 4 (\zeta c 4^2 + \xi c 4^2) \cos(\varphi 4(t)) \sin(\theta 4(t)) \sin(\varphi 4(t)) \theta 4'(t)^2 - m 4 (\gamma \pi 4^2 + \xi c 4^2) \cos(\varphi 4(t)) \sin(\theta 4(t)) \sin(\varphi 4(t)) \theta 4'(t)^2 + \\
& \frac{1}{\pi}
\end{aligned}$$

2 Fy 1 h 4  $\mu 1 y$

$$\begin{aligned}
& \tan^{-1} (1000 (-y 3'(t) + y 4'(t) - l c 3 t (\cos(\theta 3(t)) \sin(\theta 3(t)) \theta 3'(t) + \cos(\theta 3(t)) \sin(\theta 3(t)) \phi 3'(t)) + \\
& h 4 (\cos(\theta 4(t)) \cos(\varphi 4(t)) \sin(\phi 4(t)) \theta 4'(t) - \cos(\varphi 4(t)) \cos(\phi 4(t)) \varphi 4'(t) - \sin(\theta 4(t)) \sin(\varphi 4(t)) \\
& \sin(\phi 4(t)) \varphi 4'(t) + \cos(\varphi 4(t)) \cos(\phi 4(t)) \sin(\theta 4(t)) \phi 4'(t) + \sin(\varphi 4(t)) \sin(\phi 4(t)) \phi 4'(t))) \\
& (\cos(\varphi 4(t)) \cos(\phi 4(t)) \sin(\theta 4(t)) + \sin(\varphi 4(t)) \sin(\phi 4(t))) + \frac{1}{\pi}
\end{aligned}$$

2 Fx 1 h 4 (-1)  $\mu 1 x$

$$\begin{aligned}
& \tan^{-1} (1000 (-x 3'(t) + x 4'(t) + l c 3 t \sin(\theta 3(t)) \sin(\theta 3(t)) \theta 3'(t) - l c 3 t \cos(\theta 3(t)) \cos(\theta 3(t)) \phi 3'(t) - \\
& h 4 (\cos(\theta 4(t)) \cos(\varphi 4(t)) \cos(\phi 4(t)) \theta 4'(t) - \cos(\phi 4(t)) \sin(\theta 4(t)) \sin(\varphi 4(t)) \varphi 4'(t) + \cos(\varphi 4(t)) \\
& \sin(\phi 4(t)) \varphi 4'(t) + \cos(\phi 4(t)) \sin(\varphi 4(t)) \phi 4'(t) - \cos(\varphi 4(t)) \sin(\theta 4(t)) \sin(\phi 4(t)) \phi 4'(t))) \\
& (\cos(\phi 4(t)) \sin(\varphi 4(t)) - \cos(\varphi 4(t)) \sin(\theta 4(t)) \sin(\phi 4(t))) - \\
& c x 9 h 4 (\cos(\phi 4(t)) \sin(\varphi 4(t)) - \cos(\varphi 4(t)) \sin(\theta 4(t)) \sin(\phi 4(t))) \\
& (h 4 \cos(\varphi 4(t)) \cos(\phi 4(t)) \sin(\theta 4(t)) + l c 3 t \cos(\theta 3(t)) \sin(\theta 3(t)) + h 4 \sin(\varphi 4(t)) \sin(\phi 4(t)) + x 3(t) - x 4(t)) - \\
& c y 9 h 4 (\cos(\varphi 4(t)) \cos(\phi 4(t)) \sin(\theta 4(t)) + \sin(\varphi 4(t)) \sin(\phi 4(t))) \\
& (\cos(\theta 3(t)) \cos(\theta 3(t)) l c 3 t - l c 3 t - h 4 \cos(\phi 4(t)) \sin(\varphi 4(t)) + h 4 \cos(\varphi 4(t)) \sin(\theta 4(t)) \sin(\phi 4(t)) - y 3(t) + y 4(t)) + \\
& I\zeta 4 \sin(\theta 4(t)) \varphi 4 2'(t) + m 4 (\zeta c 4^2 + \gamma \pi 4^2) \sin(\theta 4(t)) \varphi 4 2'(t) \Big) / \\
& (m 4 \gamma \pi 4^2 \cos^2(\theta 4(t)) \cos^2(\varphi 4(t)) + m 4 \xi c 4^2 \cos^2(\theta 4(t)) \cos^2(\varphi 4(t)) + l \zeta 4 \cos^2(\theta 4(t)) \cos^2(\varphi 4(t)) + m 4 \zeta c 4^2 \sin^2(\theta 4(t)) + \\
& m 4 \gamma \pi 4^2 \sin^2(\theta 4(t)) + I\zeta 4 \sin^2(\theta 4(t)) + m 4 \zeta c 4^2 \cos^2(\theta 4(t)) \sin^2(\varphi 4(t)) + m 4 \xi c 4^2 \cos^2(\theta 4(t)) \sin^2(\varphi 4(t)) + \\
& l \gamma 4 \cos^2(\theta 4(t)) \sin^2(\varphi 4(t))),
\end{aligned}$$

$\theta 4 2'(t) =$

$$\begin{aligned}
& \left( I\zeta 4 \cos(\theta 4(t)) \varphi 4'(t) \phi 4'(t) \cos^2(\varphi 4(t)) - l \gamma 4 \cos(\theta 4(t)) \varphi 4'(t) \phi 4'(t) \cos^2(\varphi 4(t)) - \right. \\
& m 4 (\zeta c 4^2 + \xi c 4^2) \cos(\theta 4(t)) \varphi 4'(t) \phi 4'(t) \cos^2(\varphi 4(t)) + m 4 (\gamma \pi 4^2 + \xi c 4^2) \cos(\theta 4(t)) \varphi 4'(t) \phi 4'(t) \cos^2(\varphi 4(t)) + \\
& \frac{1}{\pi} \\
& - 2 Fx 1 h 4 (-1) \mu 1 x \\
& \tan^{-1} (1000 (-x 3'(t) + x 4'(t) + l c 3 t \sin(\theta 3(t)) \sin(\theta 3(t)) \theta 3'(t) - l c 3 t \cos(\theta 3(t)) \cos(\theta 3(t)) \phi 3'(t) - \\
& h 4 (\cos(\theta 4(t)) \cos(\varphi 4(t)) \cos(\phi 4(t)) \theta 4'(t) - \cos(\phi 4(t)) \sin(\theta 4(t)) \sin(\varphi 4(t)) \varphi 4'(t) + \cos(\varphi 4(t)) \\
& \sin(\phi 4(t)) \varphi 4'(t) + \cos(\phi 4(t)) \sin(\varphi 4(t)) \phi 4'(t) - \cos(\varphi 4(t)) \sin(\theta 4(t)) \sin(\phi 4(t)) \phi 4'(t)))
\end{aligned}$$



$$\cos(\theta_4(t)) \cos(\phi_4(t)) \cos(\varphi_4(t)) + \frac{1}{\pi}$$

2Fz1 h4 μ1z

$$\tan^{-1}(1000(-z_3'(t) + z_4'(t) + lc3t \cos(\theta_3(t)) \theta_3'(t) + h4(\cos(\varphi_4(t)) \sin(\theta_4(t)) \theta_4'(t) + \cos(\theta_4(t)) \sin(\varphi_4(t)) \varphi_4'(t))))$$

$$\sin(\theta_4(t)) \cos(\varphi_4(t)) + \frac{1}{\pi}$$

2Fy1 h4 μ1y

$$\tan^{-1}(1000(-y_3'(t) + y_4'(t) - lc3t(\cos(\phi_3(t)) \sin(\theta_3(t)) \theta_3'(t) + \cos(\theta_3(t)) \sin(\phi_3(t)) \phi_3'(t)) +$$

$$h4(\cos(\theta_4(t)) \cos(\varphi_4(t)) \sin(\phi_4(t)) \theta_4'(t) - \cos(\varphi_4(t)) \cos(\phi_4(t)) \varphi_4'(t) - \sin(\theta_4(t)) \sin(\varphi_4(t))$$

$$\sin(\phi_4(t)) \varphi_4'(t) + \cos(\varphi_4(t)) \cos(\phi_4(t)) \sin(\theta_4(t)) \theta_4'(t) + \sin(\varphi_4(t)) \sin(\phi_4(t)) \phi_4'(t))))$$

$$\cos(\theta_4(t)) \sin(\phi_4(t)) \cos(\varphi_4(t)) -$$

cx9 h4 cos(θ4(t)) cos(φ4(t))

$$(h4 \cos(\varphi_4(t)) \cos(\phi_4(t)) \sin(\theta_4(t)) + lc3t \cos(\theta_3(t)) \sin(\phi_3(t)) + h4 \sin(\varphi_4(t)) \sin(\phi_4(t)) + x_3(t) - x_4(t)) \cos(\varphi_4(t)) -$$

cy9 h4 cos(θ4(t)) sin(φ4(t))

$$(\cos(\theta_3(t)) \cos(\phi_3(t)) lc3t - lc3t - h4 \cos(\phi_4(t)) \sin(\varphi_4(t)) + h4 \cos(\varphi_4(t)) \sin(\theta_4(t)) \sin(\phi_4(t)) - y_3(t) + y_4(t)) \cos(\varphi_4(t)) +$$

cz9 h4 sin(θ4(t)) (cos(θ4(t)) cos(φ4(t)) h4 - h4 - lc3t sin(θ3(t)) + z3(t) - z4(t)) cos(φ4(t)) -

$$2Lz4 \sin(\varphi_4(t)) \theta_4'(t) \varphi_4'(t) \cos(\varphi_4(t)) + 2Lp4 \sin(\varphi_4(t)) \theta_4'(t) \varphi_4'(t) \cos(\varphi_4(t)) +$$

$$2m4(\zeta c4^2 + \xi c4^2) \sin(\varphi_4(t)) \theta_4'(t) \varphi_4'(t) \cos(\varphi_4(t)) - 2m4(\gamma p4^2 + \xi c4^2) \sin(\varphi_4(t)) \theta_4'(t) \varphi_4'(t) \cos(\varphi_4(t)) -$$

$$Lz4 \sin(\theta_4(t)) \sin(\varphi_4(t)) \theta_4'(t) \phi_4'(t) \cos(\varphi_4(t)) + Lp4 \sin(\theta_4(t)) \sin(\varphi_4(t)) \theta_4'(t) \phi_4'(t) \cos(\varphi_4(t)) +$$

$$m4(\zeta c4^2 + \xi c4^2) \sin(\theta_4(t)) \sin(\varphi_4(t)) \theta_4'(t) \phi_4'(t) \cos(\varphi_4(t)) -$$

$$m4(\gamma p4^2 + \xi c4^2) \sin(\theta_4(t)) \sin(\varphi_4(t)) \theta_4'(t) \phi_4'(t) \cos(\varphi_4(t)) + Lz4 \cos(\theta_4(t)) \sin(\varphi_4(t)) \phi_42'(t) \cos(\varphi_4(t)) -$$

$$Lp4 \cos(\theta_4(t)) \sin(\varphi_4(t)) \phi_42'(t) \cos(\varphi_4(t)) - m4(\zeta c4^2 + \xi c4^2) \cos(\theta_4(t)) \sin(\varphi_4(t)) \phi_42'(t) \cos(\varphi_4(t)) +$$

$$m4(\gamma p4^2 + \xi c4^2) \cos(\theta_4(t)) \sin(\varphi_4(t)) \phi_42'(t) \cos(\varphi_4(t)) +$$

$$cx6 lc4d \cos(\phi_4(t)) \sin(\theta_4(t)) (\cos(\theta_4(t)) \cos(\phi_4(t)) lc4d - lc4d + lc2e \cos(\theta_2(t)) \sin(\phi_2(t)) + x_2(t) - x_4(t)) +$$

$$cx5 lc4b \cos(\phi_4(t)) \sin(\theta_4(t)) (\cos(\theta_4(t)) \cos(\phi_4(t)) lc4b - lc4b - lc1a \cos(\theta_1(t)) \sin(\phi_1(t)) - x_1(t) + x_4(t)) +$$

$$cy6 lc4d \sin(\theta_4(t)) \sin(\phi_4(t)) (-\cos(\theta_2(t)) \cos(\phi_2(t)) lc2e + lc2e + lc4d \cos(\theta_4(t)) \sin(\phi_4(t)) + y_2(t) - y_4(t)) +$$

$$cy5 lc4b \sin(\theta_4(t)) \sin(\phi_4(t)) (\cos(\theta_1(t)) \cos(\phi_1(t)) lc1a - lc1a + lc4b \cos(\theta_4(t)) \sin(\phi_4(t)) - y_1(t) + y_4(t)) -$$

$$cz5 lc4b \cos(\theta_4(t)) (-lc1a \sin(\theta_1(t)) + lc4b \sin(\theta_4(t)) + z_1(t) - z_4(t)) -$$

$$cz6 lc4d \cos(\theta_4(t)) (lc2e \sin(\theta_2(t)) + lc4d \sin(\theta_4(t)) - z_2(t) + z_4(t)) -$$

$$kz12 lc4b \cos(\theta_4(t)) (x_1'(t) - x_4'(t) - lc1a \cos(\theta_1(t)) \theta_1'(t) + lc4b \cos(\theta_4(t)) \theta_4'(t)) -$$

$$kz22 lc4d \cos(\theta_4(t)) (-z_2'(t) + z_4'(t) + lc2e \cos(\theta_2(t)) \theta_2'(t) + lc4d \cos(\theta_4(t)) \theta_4'(t)) -$$

$$Lz4 \cos(\theta_4(t)) \sin^2(\varphi_4(t)) \varphi_4'(t) \phi_4'(t) + Lp4 \cos(\theta_4(t)) \sin^2(\varphi_4(t)) \varphi_4'(t) \phi_4'(t) +$$

$$m4(\zeta c4^2 + \xi c4^2) \cos(\theta_4(t)) \sin^2(\varphi_4(t)) \varphi_4'(t) \phi_4'(t) - m4(\gamma p4^2 + \xi c4^2) \cos(\theta_4(t)) \sin^2(\varphi_4(t)) \varphi_4'(t) \phi_4'(t) -$$

$$kx12 lc4b \cos(\phi_4(t)) \sin(\theta_4(t))$$

$$(x_1'(t) - x_4'(t) - lc1a \sin(\theta_1(t)) \sin(\phi_1(t)) \theta_1'(t) + lc4b \cos(\phi_4(t)) \sin(\theta_4(t)) \theta_4'(t) + lc1a \cos(\theta_1(t)) \cos(\phi_1(t)) \phi_1'(t) +$$

$$lc4b \cos(\theta_4(t)) \sin(\phi_4(t)) \phi_4'(t)) -$$

kx22 lc4d cos(φ4(t)) sin(θ4(t))

$$(-x_2'(t) + x_4'(t) + lc2e \sin(\theta_2(t)) \sin(\phi_2(t)) \theta_2'(t) + lc4d \cos(\phi_4(t)) \sin(\theta_4(t)) \theta_4'(t) -$$

$$lc2e \cos(\theta_2(t)) \cos(\phi_2(t)) \phi_2'(t) + lc4d \cos(\theta_4(t)) \sin(\phi_4(t)) \phi_4'(t)) -$$

ky12 lc4b sin(θ4(t)) sin(φ4(t))

$$(y_1'(t) - y_4'(t) + lc1a \cos(\phi_1(t)) \sin(\theta_1(t)) \theta_1'(t) + lc4b \sin(\theta_4(t)) \sin(\phi_4(t)) \theta_4'(t) + lc1a \cos(\theta_1(t)) \sin(\phi_1(t)) \phi_1'(t) -$$

$$lc4b \cos(\theta_4(t)) \cos(\phi_4(t)) \phi_4'(t)) -$$

ky22 lc4d sin(θ4(t)) sin(φ4(t))

$$(-y_2'(t) + y_4'(t) - lc2e \cos(\phi_2(t)) \sin(\theta_2(t)) \theta_2'(t) + lc4d \sin(\theta_4(t)) \sin(\phi_4(t)) \theta_4'(t) -$$

$$lc2e \cos(\theta_2(t)) \sin(\phi_2(t)) \phi_2'(t) - lc4d \cos(\theta_4(t)) \cos(\phi_4(t)) \phi_4'(t)) -$$

$$Lz4(\cos(\theta_4(t)) \cos^2(\varphi_4(t)) \sin(\theta_4(t)) \phi_4'(t)^2 - \cos(\varphi_4(t)) \sin(\theta_4(t)) \sin(\varphi_4(t)) \theta_4'(t) \phi_4'(t)) -$$

$$Lp4(\cos(\theta_4(t)) \sin(\theta_4(t)) \sin^2(\varphi_4(t)) \phi_4'(t)^2 + \cos(\varphi_4(t)) \sin(\theta_4(t)) \sin(\varphi_4(t)) \theta_4'(t) \phi_4'(t)) -$$

$$m4(\cos(\theta_4(t)) \sin(\theta_4(t)) \sin^2(\varphi_4(t)) \phi_4'(t)^2 \zeta c4^2 - \cos(\theta_4(t)) \sin(\theta_4(t)) \phi_4'(t)^2 \zeta c4^2 +$$

$$\begin{aligned}
& \cos(\varphi_4(t)) \sin(\theta_4(t)) \sin(\varphi_4(t)) \theta_4'(t) \phi_4'(t) \zeta c^4 + \cos(\theta_4(t)) \varphi_4'(t) \phi_4'(t) \zeta c^4 + \\
& \zeta c^4 \cos(\theta_4(t)) \sin(\theta_4(t)) \sin^2(\varphi_4(t)) \phi_4'(t)^2 + \eta c^4 \cos(\theta_4(t)) \cos^2(\varphi_4(t)) \sin(\theta_4(t)) \phi_4'(t)^2 + \\
& \zeta c^4 \cos(\theta_4(t)) \cos^2(\varphi_4(t)) \sin(\theta_4(t)) \phi_4'(t)^2 - \eta c^4 \cos(\theta_4(t)) \sin(\theta_4(t)) \phi_4'(t)^2 - \\
& \eta c^4 \cos(\varphi_4(t)) \sin(\theta_4(t)) \sin(\varphi_4(t)) \theta_4'(t) \phi_4'(t) + \eta c^4 \cos(\theta_4(t)) \varphi_4'(t) \phi_4'(t) - \\
& \left. \left. \left( \zeta c^4 (\cos(\theta_4(t)) \varphi_4'(t) \phi_4'(t) - \cos(\theta_4(t)) \sin(\theta_4(t)) \phi_4'(t)^2) \right) \right) \right\} / \\
& (m_4 \zeta c^4 \cos^2(\varphi_4(t)) + m_4 \zeta c^4 \cos^2(\varphi_4(t)) + l_7 c^4 \cos^2(\varphi_4(t)) + m_4 \eta c^4 \sin^2(\varphi_4(t)) + m_4 \zeta c^4 \sin^2(\varphi_4(t)) + l_7 c^4 \sin^2(\varphi_4(t))), \\
x52'(t) = & \frac{1}{m_5 \pi} (cx_7 \pi \cos(\theta_5(t)) \cos(\phi_5(t)) lc_51 - kx_{32} \pi \cos(\phi_5(t)) \sin(\theta_5(t)) \theta_5'(t) lc_51 - kx_{32} \pi \cos(\theta_5(t)) \sin(\phi_5(t)) \phi_5'(t) lc_51 - \\
& cx_7 \pi lc_51 + \\
& 2 Fx_2 \mu_2 x \\
& \tan^{-1} (1000 (-x_3'(t) + x_5'(t) - lc_3u \sin(\theta_3(t)) \sin(\phi_3(t)) \theta_3'(t) + lc_3u \cos(\theta_3(t)) \cos(\phi_3(t)) \phi_3'(t) - \\
& h_5 (\cos(\theta_5(t)) \cos(\varphi_5(t)) \cos(\phi_5(t)) \theta_5'(t) - \cos(\phi_5(t)) \sin(\theta_5(t)) \sin(\varphi_5(t)) \varphi_5'(t) + \\
& \cos(\varphi_5(t)) \sin(\phi_5(t)) \varphi_5'(t) + \cos(\phi_5(t)) \sin(\varphi_5(t)) \phi_5'(t) - \cos(\varphi_5(t)) \sin(\theta_5(t)) \sin(\phi_5(t)) \phi_5'(t))) - \\
& cx_8 lc_5n \pi \cos(\theta_5(t)) \cos(\phi_5(t)) + cx_{10} h_5 \pi \cos(\varphi_5(t)) \cos(\phi_5(t)) \sin(\theta_5(t)) - cx_8 lc_1q \pi \cos(\theta_1(t)) \sin(\phi_1(t)) - \\
& cx_7 lc_2k \pi \cos(\theta_2(t)) \sin(\phi_2(t)) - cx_{10} lc_3u \pi \cos(\theta_3(t)) \sin(\phi_3(t)) + cx_{10} h_5 \pi \sin(\varphi_5(t)) \sin(\phi_5(t)) + \\
& cx_8 \pi x_1(t) + cx_7 \pi x_2(t) + cx_{10} \pi x_3(t) - cx_{10} \pi x_5(t) - cx_7 \pi x_5(t) - cx_8 \pi x_5(t) + kx_{42} \pi x_1'(t) + kx_{32} \pi x_2'(t) - \\
& kx_{32} \pi x_5'(t) - kx_{42} \pi x_5'(t) + kx_{42} lc_1q \pi \sin(\theta_1(t)) \sin(\phi_1(t)) \theta_1'(t) + kx_{32} lc_2k \pi \sin(\theta_2(t)) \sin(\phi_2(t)) \theta_2'(t) + \\
& kx_{42} lc_5n \pi \cos(\phi_5(t)) \sin(\theta_5(t)) \theta_5'(t) - kx_{42} lc_1q \pi \cos(\theta_1(t)) \cos(\phi_1(t)) \phi_1'(t) - kx_{32} lc_2k \pi \cos(\theta_2(t)) \cos(\phi_2(t)) \phi_2'(t) + \\
& kx_{42} lc_5n \pi \cos(\theta_5(t)) \sin(\phi_5(t)) \phi_5'(t) + cx_8 lc_5n \pi), \\
y52'(t) = & \frac{1}{m_5 \pi} (cy_8 \pi \cos(\theta_1(t)) \cos(\phi_1(t)) lc_1q - ky_{42} \pi \cos(\phi_1(t)) \sin(\theta_1(t)) \theta_1'(t) lc_1q - ky_{42} \pi \cos(\theta_1(t)) \sin(\phi_1(t)) \phi_1'(t) lc_1q - \\
& cy_8 \pi lc_1q - \\
& 2 Fy_2 \mu_2 y \\
& \tan^{-1} (1000 (y_3'(t) - y_5'(t) - lc_3u (\cos(\phi_3(t)) \sin(\theta_3(t)) \theta_3'(t) + \cos(\theta_3(t)) \sin(\phi_3(t)) \phi_3'(t)) - \\
& h_5 (\cos(\theta_5(t)) \cos(\varphi_5(t)) \sin(\phi_5(t)) \theta_5'(t) - \cos(\varphi_5(t)) \cos(\phi_5(t)) \varphi_5'(t) - \sin(\theta_5(t)) \sin(\varphi_5(t)) \sin(\phi_5(t)) \varphi_5'(t) + \\
& \cos(\varphi_5(t)) \cos(\phi_5(t)) \sin(\theta_5(t)) \phi_5'(t) + \sin(\varphi_5(t)) \sin(\phi_5(t)) \phi_5'(t))) + cy_7 lc_2k \pi \cos(\theta_2(t)) \cos(\phi_2(t)) + \\
& cy_{10} lc_3u \pi \cos(\theta_3(t)) \cos(\phi_3(t)) + cy_{10} h_5 \pi \cos(\phi_5(t)) \sin(\varphi_5(t)) + cy_7 lc_51 \pi \cos(\theta_5(t)) \sin(\phi_5(t)) - \\
& cy_8 lc_5n \pi \cos(\theta_5(t)) \sin(\phi_5(t)) - cy_{10} h_5 \pi \cos(\varphi_5(t)) \sin(\theta_5(t)) \sin(\phi_5(t)) + cy_8 \pi y_1(t) + cy_7 \pi y_2(t) + \\
& cy_{10} \pi y_3(t) - cy_{10} \pi y_5(t) - cy_7 \pi y_5(t) - cy_8 \pi y_5(t) + ky_{42} \pi y_1'(t) + ky_{32} \pi y_2'(t) - ky_{32} \pi y_5'(t) - \\
& ky_{42} \pi y_5'(t) - ky_{32} lc_2k \pi \cos(\phi_2(t)) \sin(\theta_2(t)) \theta_2'(t) - ky_{32} lc_51 \pi \sin(\theta_5(t)) \sin(\phi_5(t)) \theta_5'(t) + \\
& ky_{42} lc_5n \pi \sin(\theta_5(t)) \sin(\phi_5(t)) \theta_5'(t) - ky_{32} lc_2k \pi \cos(\theta_2(t)) \sin(\phi_2(t)) \phi_2'(t) + ky_{32} lc_51 \pi \cos(\theta_5(t)) \cos(\phi_5(t)) \phi_5'(t) - \\
& ky_{42} lc_5n \pi \cos(\theta_5(t)) \cos(\phi_5(t)) \phi_5'(t) - cy_7 lc_2k \pi - cy_{10} lc_3u \pi), \\
z52'(t) = & \frac{1}{m_5 \pi} \\
& (cz_{10} \pi \cos(\theta_5(t)) \cos(\varphi_5(t)) h_5 - cz_{10} \pi h_5 + \\
& 2 Fz_2 \mu_2 z \\
& \tan^{-1} (1000 (-z_3'(t) + z_5'(t) - lc_3u \cos(\theta_3(t)) \theta_3'(t) + h_5 (\cos(\varphi_5(t)) \sin(\theta_5(t)) \theta_5'(t) + \cos(\theta_5(t)) \sin(\varphi_5(t)) \varphi_5'(t))) + \\
& cz_8 lc_1q \pi \sin(\theta_1(t)) + cz_7 lc_2k \pi \sin(\theta_2(t)) + cz_{10} lc_3u \pi \sin(\theta_3(t)) - cz_7 lc_51 \pi \sin(\theta_5(t)) + cz_8 lc_5n \pi \sin(\theta_5(t)) + \\
& cz_8 \pi z_1(t) + cz_7 \pi z_2(t) + cz_{10} \pi z_3(t) - cz_{10} \pi z_5(t) - cz_7 \pi z_5(t) - cz_8 \pi z_5(t) + kz_{42} \pi z_1'(t) + kz_{32} \pi z_2'(t) - \\
& kz_{32} \pi z_5'(t) - kz_{42} \pi z_5'(t) + kz_{42} lc_1q \pi \cos(\theta_1(t)) \theta_1'(t) + kz_{32} lc_2k \pi \cos(\theta_2(t)) \theta_2'(t) - \\
& kz_{32} lc_51 \pi \cos(\theta_5(t)) \theta_5'(t) + kz_{42} lc_5n \pi \cos(\theta_5(t)) \theta_5'(t)), \\
\end{aligned}$$

$$\varphi 52'(t) = \frac{1}{m5 \zeta c5^2 + m5 \eta x5^2 + I \xi 5}$$

$$\left( \frac{1}{\pi} \right.$$

$$2 Fz2 h5 \mu 2z$$

$$\tan^{-1}(1000(-x3'(t) + z5'(t) - lc3u \cos(\theta 3(t)) \theta 3'(t) + h5(\cos(\varphi 5(t)) \sin(\theta 5(t)) \theta 5'(t) + \cos(\theta 5(t)) \sin(\varphi 5(t)) \varphi 5'(t))) \\ \cos(\theta 5(t)) \sin(\varphi 5(t)) + cz10 h5 \cos(\theta 5(t)) (\cos(\theta 5(t)) \cos(\varphi 5(t)) h5 - h5 + lc3u \sin(\theta 3(t)) + z3(t) - z5(t)) \sin(\varphi 5(t)) +$$

$$\frac{1}{\pi}$$

$$2 Fy2 h5 \mu 2y$$

$$\tan^{-1}(1000(y3'(t) - y5'(t) - lc3u(\cos(\phi 3(t)) \sin(\theta 3(t)) \theta 3'(t) + \cos(\theta 3(t)) \sin(\phi 3(t)) \phi 3'(t)) - \\ h5(\cos(\theta 5(t)) \cos(\varphi 5(t)) \sin(\phi 5(t)) \theta 5'(t) - \cos(\varphi 5(t)) \cos(\theta 5(t)) \theta 5'(t) - \sin(\theta 5(t)) \sin(\varphi 5(t)) \sin(\phi 5(t)) \varphi 5'(t) + \\ \cos(\varphi 5(t)) \cos(\phi 5(t)) \sin(\theta 5(t)) \phi 5'(t) + \sin(\varphi 5(t)) \sin(\phi 5(t)) \theta 5'(t)))$$

$$(\cos(\varphi 5(t)) \cos(\phi 5(t)) + \sin(\theta 5(t)) \sin(\varphi 5(t)) \sin(\phi 5(t))) + \frac{1}{\pi}$$

$$2 Fx2 h5 \mu 2x$$

$$\tan^{-1}(1000(-x3'(t) + x5'(t) - lc3u \sin(\theta 3(t)) \sin(\phi 3(t)) \theta 3'(t) + lc3u \cos(\theta 3(t)) \cos(\phi 3(t)) \phi 3'(t) -$$

$$h5(\cos(\theta 5(t)) \cos(\varphi 5(t)) \cos(\phi 5(t)) \theta 5'(t) - \cos(\phi 5(t)) \sin(\theta 5(t)) \sin(\varphi 5(t)) \varphi 5'(t) +$$

$$\cos(\varphi 5(t)) \sin(\phi 5(t)) \theta 5'(t) + \cos(\phi 5(t)) \sin(\varphi 5(t)) \theta 5'(t) - \cos(\varphi 5(t)) \sin(\theta 5(t)) \sin(\phi 5(t)) \phi 5'(t)))$$

$$(\cos(\phi 5(t)) \sin(\theta 5(t)) \sin(\varphi 5(t)) - \cos(\varphi 5(t)) \sin(\phi 5(t))) +$$

$$cx10 h5 (\cos(\phi 5(t)) \sin(\theta 5(t)) \sin(\varphi 5(t)) - \cos(\varphi 5(t)) \sin(\phi 5(t)))$$

$$(h5 \cos(\varphi 5(t)) \cos(\phi 5(t)) \sin(\theta 5(t)) - lc3u \cos(\theta 3(t)) \sin(\phi 3(t)) + h5 \sin(\varphi 5(t)) \sin(\phi 5(t)) + x3(t) - x5(t)) +$$

$$cy10 h5 (\cos(\varphi 5(t)) \cos(\phi 5(t)) + \sin(\theta 5(t)) \sin(\varphi 5(t)) \sin(\phi 5(t)))$$

$$(-\cos(\theta 3(t)) \cos(\phi 3(t)) lc3u + lc3u - h5 \cos(\phi 5(t)) \sin(\varphi 5(t)) + h5 \cos(\varphi 5(t)) \sin(\theta 5(t)) \sin(\phi 5(t)) - y3(t) + y5(t)) +$$

$$I \xi 5 \cos(\theta 5(t)) \theta 5'(t) \phi 5'(t) + m5 (\zeta c5^2 + \eta x5^2) \cos(\theta 5(t)) \theta 5'(t) \phi 5'(t) -$$

$$I \xi 5 (\cos(\theta 5(t)) \theta 5'(t) \phi 5'(t) \cos^2(\varphi 5(t)) + \cos^2(\theta 5(t)) \sin(\varphi 5(t)) \phi 5'(t)^2 \cos(\varphi 5(t)) - \cos(\varphi 5(t)) \sin(\varphi 5(t)) \theta 5'(t)^2 - \\ \cos(\theta 5(t)) \sin^2(\varphi 5(t)) \theta 5'(t) \phi 5'(t)) +$$

$$I \eta x5^2 (\cos(\theta 5(t)) \theta 5'(t) \phi 5'(t) \cos^2(\varphi 5(t)) + \cos^2(\theta 5(t)) \sin(\varphi 5(t)) \phi 5'(t)^2 \cos(\varphi 5(t)) - \cos(\varphi 5(t)) \sin(\varphi 5(t)) \theta 5'(t)^2 - \\ \cos(\theta 5(t)) \sin^2(\varphi 5(t)) \theta 5'(t) \phi 5'(t)) +$$

$$m5 (\zeta c5^2 \cos(\theta 5(t)) \theta 5'(t) \phi 5'(t) \cos^2(\varphi 5(t)) - \eta x5^2 \cos(\theta 5(t)) \theta 5'(t) \phi 5'(t) \cos^2(\varphi 5(t)) + \eta x5^2 \sin(\varphi 5(t)) \theta 5'(t)^2 \cos(\varphi 5(t)) - \\ \zeta c5^2 \sin(\varphi 5(t)) \theta 5'(t)^2 \cos(\varphi 5(t)) + \zeta c5^2 \cos^2(\theta 5(t)) \sin(\varphi 5(t)) \phi 5'(t)^2 \cos(\varphi 5(t)) - \\ \eta x5^2 \cos^2(\theta 5(t)) \sin(\varphi 5(t)) \phi 5'(t)^2 \cos(\varphi 5(t)) - \zeta c5^2 \cos(\theta 5(t)) \sin^2(\varphi 5(t)) \theta 5'(t) \phi 5'(t) + \\ \eta x5^2 \cos(\theta 5(t)) \sin^2(\varphi 5(t)) \theta 5'(t) \phi 5'(t)) + I \xi 5 \sin(\theta 5(t)) \theta 52'(t) + m5 (\zeta c5^2 + \eta x5^2) \sin(\theta 5(t)) \theta 52'(t) \Big)$$

$$\phi 52'(t) =$$

$$\left( 2 I \xi 5 \cos(\varphi 5(t)) \sin(\varphi 5(t)) \varphi 5'(t) \phi 5'(t) \cos^2(\theta 5(t)) - 2 I \eta x5^2 \cos(\varphi 5(t)) \sin(\varphi 5(t)) \varphi 5'(t) \phi 5'(t) \cos^2(\theta 5(t)) - \right.$$

$$2 m5 (\zeta c5^2 + \xi c5^2) \cos(\varphi 5(t)) \sin(\varphi 5(t)) \varphi 5'(t) \phi 5'(t) \cos^2(\theta 5(t)) +$$

$$2 m5 (\eta x5^2 + \xi c5^2) \cos(\varphi 5(t)) \sin(\varphi 5(t)) \varphi 5'(t) \phi 5'(t) \cos^2(\theta 5(t)) +$$

$$cx7 lc5l \sin(\phi 5(t)) (\cos(\theta 5(t)) \cos(\phi 5(t)) lc5l - lc5l - lc2k \cos(\theta 2(t)) \sin(\phi 2(t)) + x2(t) - x5(t)) \cos(\theta 5(t)) +$$

$$cx8 lc5n \sin(\phi 5(t)) (\cos(\theta 5(t)) \cos(\phi 5(t)) lc5n - lc5n + lc1q \cos(\theta 1(t)) \sin(\phi 1(t)) - x1(t) + x5(t)) \cos(\theta 5(t)) -$$

$$cy7 lc5l \cos(\phi 5(t)) (\cos(\theta 2(t)) \cos(\phi 2(t)) lc2k - lc2k + lc5l \cos(\theta 5(t)) \sin(\phi 5(t)) + y2(t) - y5(t)) \cos(\theta 5(t)) -$$

$$cy8 lc5n \cos(\phi 5(t)) (-\cos(\theta 1(t)) \cos(\phi 1(t)) lc1q + lc1q + lc5n \cos(\theta 5(t)) \sin(\phi 5(t)) - y1(t) + y5(t)) \cos(\theta 5(t)) +$$

$$I \xi 5 \cos(\varphi 5(t)) \sin(\varphi 5(t)) \theta 52'(t) \cos(\theta 5(t)) - I \eta x5^2 \cos(\varphi 5(t)) \sin(\varphi 5(t)) \theta 52'(t) \cos(\theta 5(t)) -$$

$$m5 (\zeta c5^2 + \xi c5^2) \cos(\varphi 5(t)) \sin(\varphi 5(t)) \theta 52'(t) \cos(\theta 5(t)) + m5 (\eta x5^2 + \xi c5^2) \cos(\varphi 5(t)) \sin(\varphi 5(t)) \theta 52'(t) \cos(\theta 5(t)) +$$

$$I \xi 5 \cos^2(\varphi 5(t)) \theta 5'(t) \varphi 5'(t) \cos(\theta 5(t)) - I \eta x5^2 \cos^2(\varphi 5(t)) \theta 5'(t) \varphi 5'(t) \cos(\theta 5(t)) -$$

$$m5 (\zeta c5^2 + \xi c5^2) \cos^2(\varphi 5(t)) \theta 5'(t) \varphi 5'(t) \cos(\theta 5(t)) + m5 (\eta x5^2 + \xi c5^2) \cos^2(\varphi 5(t)) \theta 5'(t) \varphi 5'(t) \cos(\theta 5(t)) -$$

$$I \xi 5 \sin^2(\varphi 5(t)) \theta 5'(t) \varphi 5'(t) \cos(\theta 5(t)) + I \eta x5^2 \sin^2(\varphi 5(t)) \theta 5'(t) \varphi 5'(t) \cos(\theta 5(t)) +$$

$$\begin{aligned}
& m5 (\zeta c5^2 + \xi c5^2) \sin^2(\varphi5(t)) \vartheta5'(t) \varphi5'(t) \cos(\theta5(t)) - m5 (\gamma \kappa5^2 + \xi c5^2) \sin^2(\varphi5(t)) \vartheta5'(t) \varphi5'(t) \cos(\theta5(t)) + \\
& I\xi5 \vartheta5'(t) \varphi5'(t) \cos(\theta5(t)) + m5 (\zeta c5^2 + \gamma \kappa5^2) \vartheta5'(t) \varphi5'(t) \cos(\theta5(t)) + 2 I\gamma \mathfrak{P} \sin(\theta5(t)) \sin^2(\varphi5(t)) \vartheta5'(t) \varphi5'(t) \cos(\theta5(t)) + \\
& 2 m5 (\zeta c5^2 + \xi c5^2) \sin(\theta5(t)) \sin^2(\varphi5(t)) \vartheta5'(t) \varphi5'(t) \cos(\theta5(t)) + 2 I\xi5 \cos^2(\varphi5(t)) \sin(\theta5(t)) \vartheta5'(t) \varphi5'(t) \cos(\theta5(t)) + \\
& 2 m5 (\gamma \kappa5^2 + \xi c5^2) \cos^2(\varphi5(t)) \sin(\theta5(t)) \vartheta5'(t) \varphi5'(t) \cos(\theta5(t)) - 2 I\xi5 \sin(\theta5(t)) \vartheta5'(t) \varphi5'(t) \cos(\theta5(t)) - \\
& 2 m5 (\zeta c5^2 + \gamma \kappa5^2) \sin(\theta5(t)) \vartheta5'(t) \varphi5'(t) \cos(\theta5(t)) - \\
& ky32 lc51 \cos(\varphi5(t)) (y2'(t) - y5'(t) - lc2k \cos(\varphi2(t)) \sin(\theta2(t)) \theta2'(t) - lc51 \sin(\theta5(t)) \sin(\varphi5(t)) \vartheta5'(t) - \\
& lc2k \cos(\theta2(t)) \sin(\varphi2(t)) \varphi2'(t) + lc51 \cos(\theta5(t)) \cos(\varphi5(t)) \varphi5'(t)) \cos(\theta5(t)) - \\
& ky42 lc5n \cos(\varphi5(t)) (-y1'(t) + y5'(t) + lc1q \cos(\varphi1(t)) \sin(\theta1(t)) \theta1'(t) - lc5n \sin(\theta5(t)) \sin(\varphi5(t)) \vartheta5'(t) + \\
& lc1q \cos(\theta1(t)) \sin(\varphi1(t)) \varphi1'(t) + lc5n \cos(\theta5(t)) \cos(\varphi5(t)) \varphi5'(t)) \cos(\theta5(t)) - \\
& kx32 lc51 \sin(\varphi5(t)) (-x2'(t) + x5'(t) - lc2k \sin(\theta2(t)) \sin(\varphi2(t)) \theta2'(t) + lc51 \cos(\varphi5(t)) \sin(\theta5(t)) \vartheta5'(t) + \\
& lc2k \cos(\theta2(t)) \cos(\varphi2(t)) \varphi2'(t) + lc51 \cos(\theta5(t)) \sin(\varphi5(t)) \varphi5'(t)) \cos(\theta5(t)) - \\
& kx42 lc5n \sin(\varphi5(t)) (x1'(t) - x5'(t) + lc1q \sin(\theta1(t)) \sin(\varphi1(t)) \theta1'(t) + lc5n \cos(\varphi5(t)) \sin(\theta5(t)) \vartheta5'(t) - \\
& lc1q \cos(\theta1(t)) \cos(\varphi1(t)) \varphi1'(t) + lc5n \cos(\theta5(t)) \sin(\varphi5(t)) \varphi5'(t)) \cos(\theta5(t)) - \\
& I\xi5 \cos(\varphi5(t)) \sin(\theta5(t)) \sin(\varphi5(t)) \vartheta5'(t)^2 + I\gamma \mathfrak{P} \cos(\varphi5(t)) \sin(\theta5(t)) \sin(\varphi5(t)) \vartheta5'(t)^2 + \\
& m5 (\zeta c5^2 + \xi c5^2) \cos(\varphi5(t)) \sin(\theta5(t)) \sin(\varphi5(t)) \vartheta5'(t)^2 - m5 (\gamma \kappa5^2 + \xi c5^2) \cos(\varphi5(t)) \sin(\theta5(t)) \sin(\varphi5(t)) \vartheta5'(t)^2 - \\
& \frac{1}{\pi} \\
& 2 Fy2 h5 \mu2y \\
& \tan^{-1}(1000 (y3'(t) - y5'(t) - lc3u (\cos(\varphi3(t)) \sin(\theta3(t)) \theta3'(t) + \cos(\theta3(t)) \sin(\varphi3(t)) \varphi3'(t)) - \\
& h5 (\cos(\theta5(t)) \cos(\varphi5(t)) \sin(\varphi5(t)) \vartheta5'(t) - \cos(\varphi5(t)) \cos(\theta5(t)) \varphi5'(t) - \sin(\theta5(t)) \sin(\varphi5(t)) \\
& \sin(\varphi5(t)) \varphi5'(t) + \cos(\varphi5(t)) \cos(\theta5(t)) \sin(\theta5(t)) \vartheta5'(t) + \sin(\varphi5(t)) \sin(\theta5(t)) \varphi5'(t))) \\
& (\cos(\varphi5(t)) \cos(\theta5(t)) \sin(\theta5(t)) + \sin(\varphi5(t)) \sin(\theta5(t))) + \frac{1}{\pi} \\
& 2 Fx2 h5 (-1) \mu2x \\
& \tan^{-1}(1000 (-x3'(t) + x5'(t) - lc3u \sin(\theta3(t)) \sin(\varphi3(t)) \theta3'(t) + lc3u \cos(\theta3(t)) \cos(\varphi3(t)) \varphi3'(t) - \\
& h5 (\cos(\theta5(t)) \cos(\varphi5(t)) \cos(\varphi5(t)) \vartheta5'(t) - \cos(\varphi5(t)) \sin(\theta5(t)) \sin(\varphi5(t)) \varphi5'(t) + \cos(\varphi5(t)) \\
& \sin(\varphi5(t)) \varphi5'(t) + \cos(\varphi5(t)) \sin(\theta5(t)) \vartheta5'(t) - \cos(\varphi5(t)) \sin(\theta5(t)) \sin(\varphi5(t)) \varphi5'(t))) \\
& (\cos(\varphi5(t)) \sin(\varphi5(t)) - \cos(\varphi5(t)) \sin(\theta5(t)) \sin(\varphi5(t))) - \\
& cx10 h5 (\cos(\varphi5(t)) \sin(\varphi5(t)) - \cos(\varphi5(t)) \sin(\theta5(t)) \sin(\varphi5(t))) \\
& (h5 \cos(\varphi5(t)) \cos(\varphi5(t)) \sin(\theta5(t)) - lc3u \cos(\theta3(t)) \sin(\varphi3(t)) + h5 \sin(\varphi5(t)) \sin(\varphi5(t)) + x3(t) - x5(t)) - \\
& cy10 h5 (\cos(\varphi5(t)) \cos(\varphi5(t)) \sin(\theta5(t)) + \sin(\varphi5(t)) \sin(\varphi5(t))) \\
& (-\cos(\theta3(t)) \cos(\varphi3(t)) lc3u + lc3u - h5 \cos(\varphi5(t)) \sin(\varphi5(t)) + h5 \cos(\varphi5(t)) \sin(\theta5(t)) \sin(\varphi5(t)) - y3(t) + y5(t)) + \\
& I\xi5 \sin(\theta5(t)) \varphi52'(t) + m5 (\zeta c5^2 + \gamma \kappa5^2) \sin(\theta5(t)) \varphi52'(t) \Big) / \\
& (m5 \gamma \kappa5^2 \cos^2(\theta5(t)) \cos^2(\varphi5(t)) + m5 \xi c5^2 \cos^2(\theta5(t)) \cos^2(\varphi5(t)) + I\xi5 \cos^2(\theta5(t)) \cos^2(\varphi5(t)) + m5 \zeta c5^2 \sin^2(\theta5(t)) + \\
& m5 \gamma \kappa5^2 \sin^2(\theta5(t)) + I\xi5 \sin^2(\theta5(t)) + m5 \zeta c5^2 \cos^2(\theta5(t)) \sin^2(\varphi5(t)) + m5 \xi c5^2 \cos^2(\theta5(t)) \sin^2(\varphi5(t)) + \\
& I\gamma \mathfrak{P} \cos^2(\theta5(t)) \sin^2(\varphi5(t))), \\
& \vartheta52'(t) = \\
& \left( I\xi5 \cos(\theta5(t)) \varphi5'(t) \vartheta5'(t) \cos^2(\varphi5(t)) - I\gamma \mathfrak{P} \cos(\theta5(t)) \varphi5'(t) \vartheta5'(t) \cos^2(\varphi5(t)) - \right. \\
& m5 (\zeta c5^2 + \xi c5^2) \cos(\theta5(t)) \varphi5'(t) \vartheta5'(t) \cos^2(\varphi5(t)) + m5 (\gamma \kappa5^2 + \xi c5^2) \cos(\theta5(t)) \varphi5'(t) \vartheta5'(t) \cos^2(\varphi5(t)) + \\
& \frac{1}{\pi} 2 Fx2 h5 (-1) \mu2x \\
& \left. \tan^{-1}(1000 (-x3'(t) + x5'(t) - lc3u \sin(\theta3(t)) \sin(\varphi3(t)) \theta3'(t) + lc3u \cos(\theta3(t)) \cos(\varphi3(t)) \varphi3'(t) - \right. \\
& h5 (\cos(\theta5(t)) \cos(\varphi5(t)) \cos(\varphi5(t)) \vartheta5'(t) - \cos(\varphi5(t)) \sin(\theta5(t)) \sin(\varphi5(t)) \varphi5'(t) + \cos(\varphi5(t)) \\
& \sin(\varphi5(t)) \varphi5'(t) + \cos(\varphi5(t)) \sin(\theta5(t)) \vartheta5'(t) - \cos(\varphi5(t)) \sin(\theta5(t)) \sin(\varphi5(t)) \varphi5'(t))) \Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cos(\theta_5(t)) \cos(\phi_5(t)) \cos(\varphi_5(t)) + \frac{1}{\pi} \\ 2 \text{ Fz2 h5 } \mu 2 z & \tan^{-1}(1000(-z_3'(t) + z_5'(t) - lc3u \cos(\theta_3(t)) \theta_3'(t) + h_5(\cos(\varphi_5(t)) \sin(\theta_5(t)) \theta_5'(t) + \cos(\theta_5(t)) \sin(\varphi_5(t)) \varphi_5'(t))) \\ & \sin(\theta_5(t)) \cos(\varphi_5(t)) - \frac{1}{\pi} \\ 2 \text{ Fy2 h5 } \mu 2 y & \tan^{-1}(1000(y_3'(t) - y_5'(t) - lc3u(\cos(\phi_3(t)) \sin(\theta_3(t)) \theta_3'(t) + \cos(\theta_3(t)) \sin(\phi_3(t)) \phi_3'(t)) - \\ & \quad h_5(\cos(\theta_5(t)) \cos(\varphi_5(t)) \sin(\phi_5(t)) \phi_5'(t) - \cos(\varphi_5(t)) \cos(\theta_5(t)) \theta_5'(t) - \sin(\theta_5(t)) \sin(\varphi_5(t)) \\ & \quad \sin(\phi_5(t)) \phi_5'(t) + \cos(\varphi_5(t)) \cos(\theta_5(t)) \sin(\theta_5(t)) \theta_5'(t) + \sin(\varphi_5(t)) \sin(\theta_5(t)) \theta_5'(t))) \\ & \cos(\theta_5(t)) \sin(\phi_5(t)) \cos(\varphi_5(t)) - \\ c x 10 \text{ h5 } \cos(\theta_5(t)) \cos(\phi_5(t)) & (h_5 \cos(\varphi_5(t)) \cos(\theta_5(t)) \sin(\theta_5(t)) - lc3u \cos(\theta_3(t)) \sin(\phi_3(t)) + h_5 \sin(\varphi_5(t)) \sin(\theta_5(t)) + x_3(t) - x_5(t)) \cos(\varphi_5(t)) - \\ c y 10 \text{ h5 } \cos(\theta_5(t)) \sin(\phi_5(t)) & (-\cos(\theta_3(t)) \cos(\phi_3(t)) lc3u + lc3u - h_5 \cos(\theta_5(t)) \sin(\varphi_5(t)) + h_5 \cos(\varphi_5(t)) \sin(\theta_5(t)) \sin(\phi_5(t)) - y_3(t) + y_5(t)) \\ & \cos(\varphi_5(t)) + c z 10 \text{ h5 } \sin(\theta_5(t)) (\cos(\theta_5(t)) \cos(\varphi_5(t)) h_5 - h_5 + lc3u \sin(\theta_3(t)) + z_3(t) - z_5(t)) \cos(\varphi_5(t)) - \\ 2 \text{ Lz5 } \sin(\varphi_5(t)) \theta_5'(t) \varphi_5'(t) \cos(\varphi_5(t)) + 2 \text{ Lp5 } \sin(\varphi_5(t)) \theta_5'(t) \varphi_5'(t) \cos(\varphi_5(t)) + \\ 2 \text{ m5 } (\zeta c_5^2 + \xi c_5^2) \sin(\varphi_5(t)) \theta_5'(t) \varphi_5'(t) \cos(\varphi_5(t)) - 2 \text{ m5 } (\gamma c_5^2 + \xi c_5^2) \sin(\varphi_5(t)) \theta_5'(t) \varphi_5'(t) \cos(\varphi_5(t)) - \\ \text{Lz5 } \sin(\theta_5(t)) \sin(\varphi_5(t)) \theta_5'(t) \phi_5'(t) \cos(\varphi_5(t)) + \text{Lp5 } \sin(\theta_5(t)) \sin(\varphi_5(t)) \theta_5'(t) \phi_5'(t) \cos(\varphi_5(t)) + \\ \text{m5 } (\zeta c_5^2 + \xi c_5^2) \sin(\theta_5(t)) \sin(\varphi_5(t)) \theta_5'(t) \phi_5'(t) \cos(\varphi_5(t)) - \\ \text{m5 } (\gamma c_5^2 + \xi c_5^2) \sin(\theta_5(t)) \sin(\varphi_5(t)) \theta_5'(t) \phi_5'(t) \cos(\varphi_5(t)) + \text{Lz5 } \cos(\theta_5(t)) \sin(\varphi_5(t)) \phi_5^2(t) \cos(\varphi_5(t)) - \\ \text{Lp5 } \cos(\theta_5(t)) \sin(\varphi_5(t)) \phi_5^2(t) \cos(\varphi_5(t)) - \text{m5 } (\zeta c_5^2 + \xi c_5^2) \cos(\theta_5(t)) \sin(\varphi_5(t)) \phi_5^2(t) \cos(\varphi_5(t)) + \\ \text{m5 } (\gamma c_5^2 + \xi c_5^2) \cos(\theta_5(t)) \sin(\varphi_5(t)) \phi_5^2(t) \cos(\varphi_5(t)) + \\ c x 7 \text{ lc5l } \cos(\phi_5(t)) \sin(\theta_5(t)) (\cos(\theta_5(t)) \cos(\phi_5(t)) \text{lc5l} - \text{lc5l} - \text{lc2k } \cos(\theta_2(t)) \sin(\phi_2(t)) + x_2(t) - x_5(t)) + \\ c x 8 \text{ lc5n } \cos(\phi_5(t)) \sin(\theta_5(t)) (\cos(\theta_5(t)) \cos(\phi_5(t)) \text{lc5n} - \text{lc5n} + \text{lc1q } \cos(\theta_1(t)) \sin(\phi_1(t)) - x_1(t) + x_5(t)) + \\ c y 7 \text{ lc5l } \sin(\theta_5(t)) \sin(\phi_5(t)) (\cos(\theta_2(t)) \cos(\phi_2(t)) \text{lc2k} - \text{lc2k} + \text{lc5l } \cos(\theta_5(t)) \sin(\phi_5(t)) + y_2(t) - y_5(t)) + \\ c y 8 \text{ lc5n } \sin(\theta_5(t)) \sin(\phi_5(t)) (-\cos(\theta_1(t)) \cos(\phi_1(t)) \text{lc1q} + \text{lc1q} + \text{lc5n } \cos(\theta_5(t)) \sin(\phi_5(t)) - y_1(t) + y_5(t)) - \\ c z 8 \text{ lc5n } \cos(\theta_5(t)) (\text{lc1q } \sin(\theta_1(t)) + \text{lc5n } \sin(\theta_5(t)) + z_1(t) - z_5(t)) - \\ c z 7 \text{ lc5l } \cos(\theta_5(t)) (-\text{lc2k } \sin(\theta_2(t)) + \text{lc5l } \sin(\theta_5(t)) - z_2(t) + z_5(t)) - \\ \text{kz32 } \text{lc5l } \cos(\theta_5(t)) (-z_2'(t) + z_5'(t) - \text{lc2k } \cos(\theta_2(t)) \theta_2'(t) + \text{lc5l } \cos(\theta_5(t)) \theta_5'(t)) - \\ \text{kz42 } \text{lc5n } \cos(\theta_5(t)) (z_1'(t) - z_5'(t) + \text{lc1q } \cos(\theta_1(t)) \theta_1'(t) + \text{lc5n } \cos(\theta_5(t)) \theta_5'(t)) - \text{Lz5 } \cos(\theta_5(t)) \sin^2(\varphi_5(t)) \varphi_5'(t) \phi_5'(t) + \\ \text{Lp5 } \cos(\theta_5(t)) \sin^2(\varphi_5(t)) \varphi_5'(t) \phi_5'(t) + \text{m5 } (\zeta c_5^2 + \xi c_5^2) \cos(\theta_5(t)) \sin^2(\varphi_5(t)) \varphi_5'(t) \phi_5'(t) - \\ \text{m5 } (\gamma c_5^2 + \xi c_5^2) \cos(\theta_5(t)) \sin^2(\varphi_5(t)) \varphi_5'(t) \phi_5'(t) - \\ \text{kx32 } \text{lc5l } \cos(\phi_5(t)) \sin(\theta_5(t)) & (-x_2'(t) + x_5'(t) - \text{lc2k } \sin(\theta_2(t)) \sin(\phi_2(t)) \theta_2'(t) + \text{lc5l } \cos(\phi_5(t)) \sin(\theta_5(t)) \theta_5'(t) + \\ & \text{lc2k } \cos(\theta_2(t)) \cos(\phi_2(t)) \phi_2'(t) + \text{lc5l } \cos(\theta_5(t)) \sin(\phi_5(t)) \phi_5'(t)) - \\ \text{kx42 } \text{lc5n } \cos(\phi_5(t)) \sin(\theta_5(t)) & (x_1'(t) - x_5'(t) + \text{lc1q } \sin(\theta_1(t)) \sin(\phi_1(t)) \theta_1'(t) + \text{lc5n } \cos(\phi_5(t)) \sin(\theta_5(t)) \theta_5'(t) - \text{lc1q } \cos(\theta_1(t)) \cos(\phi_1(t)) \phi_1'(t) + \\ & \text{lc5n } \cos(\theta_5(t)) \sin(\phi_5(t)) \phi_5'(t)) - \\ \text{ky32 } \text{lc5l } \sin(\theta_5(t)) \sin(\phi_5(t)) & (-y_2'(t) + y_5'(t) + \text{lc2k } \cos(\phi_2(t)) \sin(\theta_2(t)) \theta_2'(t) + \text{lc5l } \sin(\theta_5(t)) \sin(\phi_5(t)) \theta_5'(t) + \\ & \text{lc2k } \cos(\theta_2(t)) \sin(\phi_2(t)) \phi_2'(t) - \text{lc5l } \cos(\theta_5(t)) \cos(\phi_5(t)) \phi_5'(t)) - \\ \text{ky42 } \text{lc5n } \sin(\theta_5(t)) \sin(\phi_5(t)) & (y_1'(t) - y_5'(t) - \text{lc1q } \cos(\phi_1(t)) \sin(\theta_1(t)) \theta_1'(t) + \text{lc5n } \sin(\theta_5(t)) \sin(\phi_5(t)) \theta_5'(t) - \text{lc1q } \cos(\theta_1(t)) \sin(\phi_1(t)) \phi_1'(t) - \\ & \text{lc5n } \cos(\theta_5(t)) \cos(\phi_5(t)) \phi_5'(t)) - \\ \text{Lz5 } (\cos(\theta_5(t)) \cos^2(\varphi_5(t)) \sin(\theta_5(t)) \phi_5'(t)^2 - \cos(\varphi_5(t)) \sin(\theta_5(t)) \sin(\varphi_5(t)) \theta_5'(t) \phi_5'(t)) - \\ \text{Lp5 } (\cos(\theta_5(t)) \sin(\theta_5(t)) \sin^2(\varphi_5(t)) \phi_5'(t)^2 + \cos(\varphi_5(t)) \sin(\theta_5(t)) \sin(\varphi_5(t)) \theta_5'(t) \phi_5'(t)) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& m5 (\cos(\theta5(t)) \sin(\theta5(t)) \sin^2(\varphi5(t)) \phi5'(t)^2 \zeta c5^2 - \cos(\theta5(t)) \sin(\theta5(t)) \phi5'(t)^2 \zeta c5^2 + \\
& \cos(\varphi5(t)) \sin(\theta5(t)) \sin(\varphi5(t)) \theta5'(t) \phi5'(t) \zeta c5^2 + \cos(\theta5(t)) \varphi5'(t) \phi5'(t) \zeta c5^2 + \\
& \xi c5^2 \cos(\theta5(t)) \sin(\theta5(t)) \sin^2(\varphi5(t)) \phi5'(t)^2 + r\kappa5^2 \cos(\theta5(t)) \cos^2(\varphi5(t)) \sin(\theta5(t)) \phi5'(t)^2 + \\
& \xi c5^2 \cos(\theta5(t)) \cos^2(\varphi5(t)) \sin(\theta5(t)) \phi5'(t)^2 - r\kappa5^2 \cos(\theta5(t)) \sin(\theta5(t)) \phi5'(t)^2 - \\
& r\kappa5^2 \cos(\varphi5(t)) \sin(\theta5(t)) \sin(\varphi5(t)) \theta5'(t) \phi5'(t) + r\kappa5^2 \cos(\theta5(t)) \varphi5'(t) \phi5'(t) - \\
& l\zeta5 (\cos(\theta5(t)) \varphi5'(t) \phi5'(t) - \cos(\theta5(t)) \sin(\theta5(t)) \phi5'(t)^2) \Big/ \\
& (m5 \zeta c5^2 \cos^2(\varphi5(t)) + m5 \xi c5^2 \cos^2(\varphi5(t)) + l\kappa5 \cos^2(\varphi5(t)) + m5 r\kappa5^2 \sin^2(\varphi5(t)) + m5 \xi c5^2 \sin^2(\varphi5(t)) + l\zeta5 \sin^2(\varphi5(t)));
\end{aligned}$$

"List variables";

```

eqr = {x1(t), y1(t), z1(t), \varphi1(t), \phi1(t), \theta1(t), x2(t), y2(t), z2(t), \varphi2(t), \phi2(t), \theta2(t), x3(t), y3(t), z3(t), \varphi3(t), \phi3(t),
\theta3(t), x4(t), y4(t), z4(t), \varphi4(t), \phi4(t), \theta4(t), x5(t), y5(t), z5(t), \varphi5(t), \phi5(t), \theta5(t), x12(t), y12(t), z12(t), \varphi12(t),
\phi12(t), \theta12(t), x22(t), y22(t), z22(t), \varphi22(t), \phi22(t), \theta22(t), x32(t), y32(t), z32(t), \varphi32(t), \phi32(t), \theta32(t), x42(t),
y42(t), z42(t), \varphi42(t), \phi42(t), \theta42(t), x52(t), y52(t), z52(t), \varphi52(t), \phi52(t), \theta52(t)};

```

"Solving the system";

```

nds = NDSolve[eqn, eqr, {t, 0, mrange}, MaxSteps -> 1000000];

```

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ  
(СамГУПС)

ул. Свободы, 2 В, г. Самара, 443066, тел. (846) 262-41-12,  
255-67-00, ж.д. 2-44-34, факс: 262-30-76,  
e-mail: rektorat@samgups.ru  
ИНН 6318100463; КПП 631801001,  
УФК по Самарской обл. (4208 СамГУПС, л/с 20426У34880)  
в Отделении Самара г. Самара, БИК 043601001,  
р/с 40501810836012000002

от \_\_\_\_\_ 20\_\_ г. № \_\_\_\_\_  
На № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

УТВЕРЖДАЮ:

проректор по учебной работе –  
начальник УМУ  
к.т.н. доц. Булатов А.А.



## АКТ

о внедрении результатов  
кандидатской диссертационной работы  
Мустафаева Юрия Кямаловича

Комиссия в составе:

Председатель: декан факультета «Подвижной состав и путевые машины»,  
к.т.н., доц. Панченко В.И.

Члены комиссии:

зав. кафедрой Вагоны, председатель СОП по специальности  
23.05.03 «Подвижной состав железных дорог», к.т.н. Коркина С.В.  
профессор кафедры Вагоны, д.т.н. Балалаев А. Н.

составили настоящий акт в том, что результаты диссертационной работы «Динамика ходовых частей вагона с учётом гироскопических свойств колёсных пар», представленной на соискание учёной степени кандидата технических наук, использованы в деятельности Самарского государственного университета путей сообщения в виде:

1. Математической модели колебаний колёсной пары с учётом её гироскопических свойств.
2. Математической модели динамики трёхэлементной тележки грузового вагона с учётом гироскопических свойств колёсных пар.
3. Программы расчёта кинематических и динамических характеристик звеньев тележки грузового вагона.
4. Методики расчёта динамических характеристик тележки грузового вагона.

Использование указанных результатов позволяет повысить качество обучения студентов по дисциплинам «Основы динамики подвижного состава», «Математические модели объектов и процессов».

Председатель комиссии:

Члены комиссии:

 В. И. Панченко  
 С. В. Коркина  
 А. Н. Балалаев





УТВЕРЖДАЮ

Генеральный директор  
ООО «Уральское  
конструкторское  
бюро вагоностроения»  
кандидат технических наук



— Д. П. Перфильев

« 28 // 2016 г.

АКТ №

об использовании результатов кандидатской  
диссертационной работы Мустафаева Ю. К.

Результаты диссертационного исследования старшего преподавателя кафедры «Механика и инженерная графика» СамГУПС Мустафаева Юрия Кямаловича, представленные математической моделью динамики трёхэлементной тележки грузового вагона в виде:


- текстового описания математической модели и методики её разработки;

- программного файла модели;

- методических указаний к работе с программным файлом для проведения динамических расчетов были рассмотрены по существу на предмет использования. В результате рассмотрения установлена целесообразность использования выдвинутых теоретических положений и программных разработок автора применительно к исследованию динамических характеристик ходовых частей грузовых вагонов.

В результате обсуждений решено представленную математическую модель динамики трёхэлементной тележки одобрить и рекомендовать к использованию.

Заместитель генерального директора  
по конструкторской документации –  
Главный конструктор ООО «УКБВ»



А.В. Дорожкин